EQUAZIONI ALGEBRICHE

Esercizi svolti dal Prof. Trivia Gianluigi (scritto con Lyx)

Introduzione

Questa è solo una dispensa di esercizi con brevi richiami alla teoria, per approfondire la quale si rinvia ai libri di testo in uso. Facciamo precedere lo studio delle equazioni di ogni ordine e grado da un riesame delle frazioni algebriche, ostacolo principale per gli studenti.

Prerequisiti per affrontare correttamente le frazioni algebriche:

1. Metodi di Scomposizione dei polinomi nel prodotto dei loro fattori, prodotti notevoli compresi
2. Chiara conoscenza del significato e del calcolo del minimo comune multiplo (in questo caso tra polinomi)
3. Condizione di esistenza di una frazione (Denominatore diverso da zero; la divisione con divisore uguale a zero può essere o indeterminata, se anche il numeratore è zero, o impossibile in tutti gli altri casi)

Le procedure sono le stesse di quelle usate per le frazioni numeriche:

1. Riduzione delle frazioni allo stesso denominatore (mcm) nel caso di somma algebrica
2. Semplificazione di polinomi preceduta dalla loro scomposizione per le moltiplicazioni
3. Ricordare sempre la priorità delle operazioni da svolgere e il significato delle parentesi come strumento per variare tali priorità.

1. Frazioni algebriche

Esercizio 1. Semplificare la seguente espressione

$$\left(\frac{x}{2x-2}-\frac{x}{2x+2}-\frac{1}{1-x^2}\right):\left(1+\frac{1}{x-1}\right)$$

Soluzione. Scomponiamo i denominatori per poi determinare il *mcm*. Nelle prime due frazioni applicheremo il raccoglimento totale e, nell'ultima frazione tra la parentesi, riconosciamo il prodotto notevole detto differenza di due quadrati. Nel divisore eseguiamo la somma, essendo $x-1$ il *mcm*.

$$\left[\frac{x}{2(x-1)}-\frac{x}{2(x+1)}-\frac{1}{(1-x)(1+x)}\right]:\left(\frac{x-1+1}{x-1}\right)=$$

osserviamo che $1-x\neq x-1$, ma $1-x=-(x-1)$; il mcm tra la parentesi quadra è quindi $2(x-1)(x+1)$

$$\left[\frac{x(x+1)-x(x-1)+2}{2(x-1)(x+1)}\right]:\left(\frac{x}{x-1}\right)=$$

$$\left(\frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}+x+2}{2\cancel{(x-1)}(x+1)}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{x-1}}{x}\right)=$$

$$\frac{2x+2}{2x(x+1)}=\frac{\cancel{2}\cancel{(x+1)}}{\cancel{2}x\cancel{(x+1)}}=\frac{1}{x}$$

Esercizio 2. Semplificare la seguente espressione

$$\left(\frac{a^2-2a+1}{a^2}-\frac{a^2}{a^2+2a+1}\right):\left(2-\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}\right)^2$$

Soluzione. Riconosciamo il prodotto notevole $a^2+2a+1=(a+1)^2$. Nel divisore eseguiamo la somma, essendo $mcm=a(a+1)$. [Anche $a^2-2a+1=(a-1)^2$]; il mcm entro la la parentesi quadra è $a^2(a+1)^2$, per cui

$$\left[\frac{(a-1)^2(a+1)^2-a^4}{a^2(a+1)^2}\right]:\left(\frac{2a(a+1)-(a+1)-a}{a(a+1)}\right)^2=$$

applichiamo la proprietà delle potenze $a^2b^2=(ab)^2$ e il prodotto notevole

$$\left[\frac{(a^2-1)^2-a^4}{a^2(a+1)^2}\right]:\left(\frac{2a^2+\cancel{2a}\cancel{-a}-1\cancel{-a}}{a(a+1)}\right)^2=$$

$$\left[\frac{\cancel{a^4}-2a^2+1\cancel{-a^4}}{a^2(a+1)^2}\right]:\left[\frac{2a^2-1}{a(a+1)}\right]^2=$$

$$\frac{1-2a^2}{\cancel{a^2(a+1)^2}}\cdot\frac{\cancel{a^2(a+1)^2}}{(2a^2-1)^2}=$$

ora $1-2a^2=-\left(2a^2-1\right)$ per cui

$$-\frac{\cancel{2a^2-1}}{1}\cdot\frac{1}{(2a^2-1)^{\cancel{2}}}=-\frac{1}{2a^2-1}=\frac{1}{1-2a^2}$$

Esercizio 3. Semplificare la seguente espressione

$$\left(\frac{a-2}{a^3+8}-\frac{b-1}{a^2b-2ab+4b}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{4a}{a+2}\right)$$

Soluzione. Riconosciamo il prodotto notevole $a^3+8=(a+2)\left(a^2-2a+4\right)$. Calcoliamo i denominatori comuni in entrambe le parentesi per sommare le frazioni, scomponendo prima i polinomi nel prodotto dei loro fattori

$$\left[\frac{a-2}{(a+2)\left(a^2-2a+4\right)}-\frac{b-1}{b\left(a^2-2a+4\right)}\right]:\left[\frac{a(a+2)-4ab}{b(a+2)}\right]=$$

nella prima parentesi quadra $mcm=b(a+2)\left(a^2-2a+4\right)$

$$\left[\frac{b(a-2)-(b-1)(a+2)}{b(a+2)\left(a^2-2a+4\right)}\right]:\left(\frac{a^2+2a-4ab}{b(a+2)}\right)=$$

$$\left[\frac{\cancel{ab}-2b\cancel{-ab}-2b+a+2}{b(a+2)\left(a^2-2a+4\right)}\right]:\left[\frac{a(a-4b+2)}{b(a+2)}\right]=$$

$$\frac{\cancel{a-4b+2}}{\cancel{b}\cancel{(a+2)}\left(a^2-2a+4\right)}\cdot\frac{\cancel{b}\cancel{(a+2)}}{a\cancel{(a-4b+2)}}=\frac{1}{a\left(a^2-2a+4\right)}$$

Esercizio 4. Semplificare la seguente espressione

$$\left[\left(\frac{x}{x^2-x-6}+\frac{x}{x^2+5x+6}-\frac{1}{x+2}\right):\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-1}\right)\right]\cdot\left(1-\frac{18}{x^2+9}\right)$$

Soluzione. Riconosciamo i trinomi notevoli $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$ e $x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$. Il polinomio x^2+9 è irriducibile essendo la somma di due quadrati

$$\left[\frac{x}{(x-3)(x+2)}+\frac{x}{(x+3)(x+2)}-\frac{1}{x+2}:\frac{x-1-x-2}{(x+2)(x-1)}\right]\cdot\left(\frac{x^2+9-18}{x^2+9}\right)=$$

i denominatori comuni sono il prodotto dei polinomi comuni presi una sola volta

$$\left[\frac{x(x+3)+x(x-3)-(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+3)(x+2)}:\frac{-3}{(x+2)(x-1)}\right]\cdot\left(\frac{x^2-9}{x^2+9}\right)=$$

$$\left[\frac{x^2\cancel{+3x}+\cancel{x^2}\cancel{-3x}\cancel{-x^2}+9}{(x-3)(x+3)\cancel{(x+2)}}\cdot\frac{\cancel{(x+2)}(x-1)}{-3}\right]\cdot\left[\frac{(x-3)(x+3)}{x^2+9}\right]=$$

ricordando che $\frac{x-1}{-3}=-\frac{x-1}{3}=\frac{1-x}{3}$

$$\frac{\cancel{x^2+9}}{\cancel{(x-3)(x+3)}}\cdot\frac{x-1}{-3}\cdot\frac{\cancel{(x-3)(x+3)}}{\cancel{x^2+9}}=\frac{1-x}{3}$$

Esercizio 5. Semplificare la seguente espressione

$$\frac{2}{x^2+2x-3}-\frac{3}{6-x-x^2}-\frac{4}{x^2-3x+2}+\frac{19-x}{x^3-7x+6}$$

Soluzione. Scomponiamo tutti i denominatori: $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$; $6-x-x^2$, si può scrivere $-\left(x^2+x-6\right)=-(x+3)(x-2)$; $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$. L'ultimo polinomio è di terzo grado non completo e applichiamo il teorema e la regola di Ruffini. Si vede che se $x=1$, allora $x^3-7x+6=1-7+6=0$, per cui il polinomio è divisibile per $(x-1)$ e dividendo con Ruffini $x^3-7x+6=(x-1)\left(x^2+x-6\right)=(x-1)(x+3)(x-2)$

[Il segno negativo di $-(x+3)(x-2)$ lo si porta davanti alla linea di frazione per cui il segno finale diverrà positivo

$$\frac{2}{(x+3)(x-1)}+\frac{3}{(x+3)(x-2)}-\frac{4}{(x-2)(x-1)}+\frac{19-x}{(x-1)(x+3)(x-2)}=$$

il denominatore comune sarà $(x-1)(x-2)(x+3)$

$$\frac{2(x-2)+3(x-1)-4(x+3)+19-x}{(x-1)(x-2)(x+3)}=$$

$$\frac{\cancel{2x}\cancel{-4}\cancel{+3x}\cancel{-3}\cancel{-4x}\cancel{-12}\cancel{+19}\cancel{-x}}{(x-1)(x-2)(x+3)}=0$$

Parte I.

Equazioni e Identità

Esercizio 6. Dire se la seguente uguaglianza

$$x+2(3x-1)+4\left(x-\frac{1}{2}\right)=10-3x$$

è vera o falsa per $x=0$, $x=-1$ e $x=1$.

Soluzione. L'esercizio richiede la conoscenza del significato di equazione e di soluzione, cioè del valore che sostituito all'incognita x, verifica l'uguaglianza. (Diciamo soluzione al singolare, perché nelle equazioni ben definite di primo grado si ha una sola soluzione)

Sostituiamo pertanto in entrambi i membri i valori assegnati
Se $x=0$, allora

$$\begin{array}{ll} 1^\circ\,membro & 0+2(3\cdot 0-1)+4\left(0-\frac{1}{2}\right)=-2-2=-4 \\ 2^\circ\,membro & 10-3\cdot 0=10 \end{array}$$

$x=0$ non è una soluzione.
Se $x=-1$, allora

$$\begin{array}{ll} 1^\circ\,membro & -1+2[3\cdot(-1)-1]+4\left(-1-\frac{1}{2}\right)=-1-8-6=-15 \\ 2^\circ\,membro & 10-3\cdot(-1)=13 \end{array}$$

$x=-1$ non è una soluzione.
Se $x=1$, allora

$$\begin{array}{ll} 1^\circ\,membro & 1+2[3\cdot 1-1]+4\left(1-\frac{1}{2}\right)=1+4+2=7 \\ 2^\circ\,membro & 10-3\cdot 1=7 \end{array}$$

$x=1$ è una soluzione dell'equazione data essendo vera l'uguaglianza $7=7$.

Esercizio 7. Verificare l'equazione

$$(x-2)(x+2)-7(x-1)=1-2(x+2)$$

per $x=2$, e per $x=3$. Perché si può affermare che essa non è un'identità?

Soluzione. Sostituiamo pertanto in entrambi i membri i valori assegnati

Se $x=2$, allora

$$\begin{array}{ll} 1^\circ\,membro & (2-2)(2+2)-7(2-1)=-7 \\ 2^\circ\,membro & 1-2(2+2)=-7 \end{array}$$

$x=2$ è una soluzione.
Se $x=3$, allora

$$\begin{array}{ll} 1^\circ\,membro & (3-2)(3+2)-7(3-1)=5-14=-9 \\ 2^\circ\,membro & 1-2(3+2)=1-10=-9 \end{array}$$

l'equazione ammette due soluzioni perché il polinomio al primo membro è di secondo grado.
Un'identità è una uguaglianza vera per tutti i valori dell'incognita. Se sostituiamo $x=0$, si ha

$$\begin{array}{ll} 1^\circ\,membro & -2\times 2-7\times(-1)=-4+7=3 \\ 2^\circ\,membro & 1-2\times 2=-3 \end{array}$$

come si vede $x=0$ non è una soluzione, e quindi, l'equazione data non è una identità.

Principi di equivalenza

Questi principi consentono di trasformare un'equazione iniziale in un'equazione equivalente (cioè con lo stesso insieme di soluzioni) ma più semplice da risolvere.

Primo principio di equivalenza: Sommando o sottraendo uno stesso numero (o una stessa espressione) a entrambi i membri di un'equazione, si ottiene un'equazione equivalente. Applicazione pratica: si possono spostare i termini da un membro all'altro cambiando il loro segno.

Secondo principio di equivalenza: Se moltiplico o divido per uno stesso numero (o espressione) diverso/a da zero entrambi i membri di un'equazione, si ottiene un'equazione equivalente.

Esercizio 8. Indicare il principio di equivalenza che consente di giustificare la trasformazione della prima equazione nella seconda.

$$\begin{array}{ll} 4x+2=0 & 2x+1=0 \\ 5x-3=x+2 & 4x-3=2 \\ \frac{x}{2}+1=3x & x+2=6x \end{array}$$

Soluzione. Primo caso: È stato applicato il secondo principio in quanto tutti i coefficienti numerici sono stati divisi per 2, numero diverso da zero.

Secondo caso: È stato applicato il primo principio poiché si è sottratto a ogni membro il termine x, cioè

$$5x-x-3=x-x+2$$

come si vede, ciò corrisponde a spostare il termine x dal secondo al primo membro, cambiando il suo segno.

Terzo caso: È stato applicato il secondo principio poiché tutti i termini sono stati moltiplicati per $2 \neq 0$ per rendere l'equazione con coefficienti tutti interi.

Esercizio 9. Verificare che l'equazione

$$3x+4-3(x+1)=(x-1)^2+2x-x^2$$

è equivalente all'equazione $0x=0$, giustificando ogni passaggio e dedurre così che l'equazione data è indeterminata.

Soluzione. Svolgiamo

$3x+4-3x-3=x^2-2x+1+2x-x^2$	moltiplicazione
$0x+1=0x+1$	Somma termini simili
$0x=0$	1° principio, sottraendo 1da ogni membro

L'equazione è indeterminata perché ogni numero reale moltiplicato per 0 dà come risultato 0.

2. Equazioni di primo grado

Esercizio 10. Risolvere e verificare la seguente equazione

$$5\,(2+x) = 3\,(1+x) - 2x - 4\,(2-x)$$

Soluzione. Eseguiamo le moltiplicazioni

$$10 + 5x = 3 + 3x - 2x - 8 + 4x$$

trasportiamo i termini cambiando i loro segni

$$5x - 3x + 2x - 4x = -10 + 3 - 8$$

sommiamo i termini simili

$$0x = -15$$

l'equazione risulta impossibile, non essendoci alcun valore di x che moltiplicato per 0 possa dare come risultato -15.

Esercizio 11. Risolvere la seguente equazione

$$5 + 2\,(4-x) + 3\,(x-5) = 6\,(x+2) - 3\,(4x-7)$$

Soluzione. Eseguiamo le operazioni indicate e applichiamo i criteri di equivalenza (facendo attenzione ai segni)

$$5 + 8 - 2x + 3x - 15 = 6x + 12 - 12x + 21$$

$$-2 + x = -6x + 33$$

portiamo i termini contenenti l'incognita al primo membro e i termini noti al secondo

$$x + 6x = 33 + 2$$

$$7x = 35 \quad x = \frac{35}{7} = 5$$

Esercizio 12. Risolvi l'equazione con coefficienti razionali

$$\frac{x+1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{2x-1}{4}\,(x+2) + \frac{15}{4}$$

Soluzione. Riscriviamo l'equazione

$$\frac{x+1}{2}\left(\frac{2x-1}{2}\right) = \frac{(2x-1)\,(x+2)}{4} + \frac{15}{4}$$

$$\frac{(x+1)\,(2x-1)}{4} = \frac{(2x-1)\,(x+2)}{4} + \frac{15}{4}$$

il mcm tra i denominatori è 4; moltiplichiamo quindi per 4 entrambi i membri (2° criterio di equivalenza) per ottenere una equazione equivalente con coefficienti interi

$$4 \cdot \frac{(x+1)(2x-1)}{4} = 4 \cdot \frac{(2x-1)(x+2)}{4} + 4 \cdot \frac{15}{4}$$

semplifichiamo

$$(x+1)(2x-1) = (2x-1)(x+2) + 15$$

osservando l'espressione ottenuta è conveniente svolgere come segue

$$(x+1)(2x-1) - (2x-1)(x+2) = 15$$

$$(2x-1)(x+1-x-2) = 15$$

$$1-2x = 15$$

da cui

$$-2x = 14 \quad x = -\frac{14}{2} = -7$$

Esercizio 13. Risolvi l'equazione con coefficienti razionali

$$\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(2x-1) + \frac{1}{4}(2x+1)\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}x\right] + \frac{1}{6}$$

Soluzione. Riscriviamo l'equazione

$$\frac{2}{3}\left[\frac{2x-1}{2} + \frac{2x+1}{4}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{x+1-x}{2}\right] + \frac{1}{6}$$

$$\frac{2x-1}{3} + \frac{2x+1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

il mcm tra i denominatori è 6; moltiplichiamo quindi per 6 entrambi i membri (2° criterio di equivalenza) per ottenere una equazione equivalente con coefficienti interi

$$4x-2+2x+1 = 2$$

da cui

$$6x = 3 \quad x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 14. Risolvi l'equazione con coefficienti razionali

$$\frac{1}{4}\left[(x-2)\left(3-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(1-x)\right] + \frac{1}{2}(x+1) = x - \frac{5}{8}$$

Soluzione. Riscriviamo l'equazione

$$\frac{1}{4}\left[\frac{5}{2}(x-2) + \frac{1}{2}(1-x)\right] + \frac{1}{2}(x+1) = x - \frac{5}{8}$$

$$\frac{5(x-2)}{8} + \frac{1-x}{8} + \frac{x+1}{2} = x - \frac{5}{8}$$

il mcm tra i denominatori è 8; moltiplichiamo quindi per 8 entrambi i membri (2° criterio di equivalenza) per ottenere una equazione equivalente con coefficienti interi

$$5x-10+1-x+4x+4 = 8x-5$$

separiamo le incognite dai termini noti

$$5x - x + 4x - 8x = -1 - 4 + 10 - 5$$

$$0x = 0$$

l'equazione è detta indeterminata.

Esercizio 15. Risolvi l'equazione con coefficienti razionali

$$2x + \left[\frac{x-1}{3} - \left(x - \frac{x+1}{2}\right) + \frac{2x+1}{6}\right] = 4\left(1 + \frac{1}{2}x\right)$$

Soluzione. Riscriviamo l'equazione

$$2x + \left[\frac{x-1}{3} - \left(\frac{2x-x-1}{2}\right) + \frac{2x+1}{6}\right] = 4\left(\frac{2+x}{2}\right)$$

togliamo le parentesi

$$\cancel{2x} + \frac{x-1}{3} - \frac{x-1}{2} + \frac{2x+1}{6} = 4 + \cancel{2x}$$

il mcm tra i denominatori è 6; moltiplichiamo quindi per 6 entrambi i membri (2° criterio di equivalenza) per ottenere una equazione equivalente con coefficienti interi

$$2x - 2 - 3x + 3 + 2x + 1 = 24$$

separiamo le incognite dai termini noti e sommiamo

$$x = 22$$

Esercizio 16. Risolvi l'equazione con coefficienti razionali

$$\left(2 - \frac{1}{2}\right)\left[x + \frac{2-x}{2} + \frac{2x-3}{2}\right] = 3 + x - \left(\frac{1-x}{2} - x\right) + \left(2 + \frac{1}{2}\right)(x-2)$$

Soluzione. Riscriviamo l'equazione sommando le frazioni dentro le parentesi

$$\frac{3}{2}\left[\frac{2x+2-x+2x-3}{2}\right] = 3 + x - \left(\frac{1-x-2x}{2}\right) + \frac{5}{2}(x-2)$$

moltiplichiamo e togliamo le parentesi

$$\frac{9x-3}{4} = 3 + x - \frac{1-3x}{2} + \frac{5x}{2} - 5$$

il mcm tra i denominatori è 4;

$$9x - 3 = 12 + 4x - 2 + 6x + 10x - 20$$

separiamo le incognite dai termini noti e sommiamo

$$9x - 4x - 6x - 10x = 3 + 12 - 2 - 20$$

$$-11x = -7 \quad x = \frac{7}{11}$$

Esercizio 17. Risolvi l'equazione con coefficienti razionali

$$\frac{1-[-x-3(2-x)]}{2+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}}+\frac{\frac{1}{2}-3}{2+\frac{1}{2}}=-\frac{2}{3}x\left(\frac{5}{4}-2^{-2}\right)$$

Soluzione. Riscriviamo questa equazione che richiede di ricordare le proprietà delle potenze

$$\frac{1-(-x-6+3x)}{2+9-8}+\frac{-\frac{\cancel{5}}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{5}}{\cancel{2}}}=-\frac{2}{3}x\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{1-2x+6}{3}-1=-\frac{2x}{3}$$

il mcm tra i denominatori è 3;

$$7-2x-3=-2x$$

separiamo le incognite dai termini noti e sommiamo

$$-2x+2x=3-7$$

$$0x=-4 \qquad \textit{impossibile}$$

Esercizio 18. Risolvi l'equazione con coefficienti razionali

$$\frac{\left(\frac{x+2}{3}-\frac{x-2}{6}\right)(1,3-0,7)}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2-\left(1+\frac{2}{3}\right)^2}+\frac{1}{8}(x+6)=0,7$$

Soluzione. Riscriviamo questa equazione che richiede di ricordare il legame tra i numeri decimali e le frazioni

$$\frac{\left(\frac{2x+4-x+2}{6}\right)\cdot 0,6}{\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{5}{3}\right)^2}+\frac{x+6}{8}=0,7$$

$$\frac{\frac{x+6}{6}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{9}-\frac{25}{9}}+\frac{x+6}{8}=\frac{7}{10}$$

$$\frac{\frac{x+6}{10}}{-\frac{8}{3}}+\frac{x+6}{8}=\frac{7}{10}$$

la frazione di una frazione è il prodotto del numeratore per il reciproco del denominatore,

$$\frac{x+6}{10}\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)+\frac{x+6}{8}=\frac{7}{10}$$

$$-\frac{3x+18}{80}+\frac{x+6}{8}=\frac{7}{10}$$

$mcm=80$, per cui

$$-3x-18+10x+60=56$$

separiamo le incognite dai termini noti e sommiamo

$$7x=14 \qquad x=\frac{14}{7}=2$$

Equazioni parametriche

Esercizio 19. Determinare il valore del parametro k affinché l'equazione

$$x+2k(x-2)+1=0$$

abbia soluzione $x=1$.

Soluzione. Si tratta di ricordare il significato di soluzione di una equazione, cioè il valore che sostituito all'incognita x, verifica l'uguaglianza. La risposta passa quindi attraverso la sostituzione $x=1$ e di risolvere rispetto a k

$$1+2k(1-2)+1=0$$
$$2-2k=0$$

da cui

$$k=1$$

Infatti l'equazione in tal caso diviene

$$x+2(x-2)+1=0$$

che ammette la soluzione $x=1$

Esercizio 20. Determinare il valore del parametro k affinché i due polinomi seguenti siano identici:

$$3x^2+(k+1)x+4 \quad e \quad 3x^2+(5-3k)x+4$$

Soluzione. Si vede che i due polinomi saranno identici se

$$k+1=5-3k$$

essendo gli altri termini si secondo grado e il termine noto già uguali

$$4k=4$$

da cui

$$k=1$$

Esercizio 21. Data la funzione

$$f(x)=(k-1)x^3+4kx^2-(3k+1)x+k$$

determinare il valore del parametro k affinché $f(2)=28$

Soluzione. La funzione è rappresentata da un polinomio ordinato e completo di terzo grado. La scrittura $f(2)$ sta a significare che 28 è il numero che si deve ottenere sostituendo $x=2$. Pertanto

$$f(2)=8(k-1)+16k-2(3k+1)+k=28$$

svolgendo i calcoli

$$8k-8+16k-6k-2+k=28$$
$$19k=38$$

da cui

$$k=\frac{38}{19}=2$$

Esercizio 22. Determinare per quale valore di x le funzioni seguenti hanno la stessa immagine:

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{x^2+2}{2}$$

$$g(x) = (x-1)^3 + 3x^2 - x^3$$

Soluzione. Riscriviamo le due funzioni in forma normale

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1-x^2-2}{2} = \frac{2x-1}{2} = x - \frac{1}{2}$$

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 - x^2 = 3x - 1$$

Le due funzioni hanno lo stesso dominio $\forall x \in \mathbb{R}$; l'immagine di una funzione è un elemento del codominio che si ottiene come risultato sostituendo a x un numero dato. Se l'immagine deve essere la stessa, allora ci dovrebbe essere un valore di x affinché

$$x - \frac{1}{2} = 3x - 1$$

$$2x = \frac{1}{2}$$

da cui

$$x = \frac{1}{4}$$

Problemi risolvibili con equazioni di primo grado

Ricavo quando segue dall'*Arithmetica universalis* di **Isaac Newton** (da me tradotto):

"Quando ci si sarà sufficientemente esercitati nel trasformare e ridurre equazioni, bisogna testare le proprie forze traducendo problemi in equazioni. Proposto un problema, una parte importante della capacità del calcolatore consiste nell'esprimere con equazioni ciascuna delle condizioni del problema. Per riuscirvi, esaminerà dapprima se tutte queste condizioni possono essere espresse in forma algebrica, allo stesso modo in cui esprimiamo i nostri pensieri per mezzo delle lettere dell'alfabeto. Se la cosa è possibile (come lo è sempre, quando il problema riguarda numeri o quantità astratte), allora assegnerà nomi alle quantità note, così come a quelle incognite; e il significato del problema sarà espresso, se così si può dire, con un discorso analitico. E le condizioni così tradotte in linguaggio algebrico, daranno tante equazioni quante ne servono per risolvere il problema.

Per esempio, se si chiedono tre numeri in proporzione continua, la cui somma sia 20 e la somma dei quadrati 140, chiamerò questi tre numeri incogniti con x, y, z; e il problema sarà tradotto dal linguaggio comune in quello algebrico, in questo modo:

Problema enunciato in linguaggio ordinario	*Lo stesso in linguaggio algebrico*
Si cerchino tre numeri che abbiano queste condizioni	x, y, z
1°. Che essi siano in proporzione continua	$x : y = y : z$, oppure $xz = y^2$
Che la loro somma faccia 20	$x + y + z = 20$
Che la somma dei loro quadrati faccia 140	$x^2 + y^2 + z^2 = 140$

Così il problema è ridotto alle equazioni $xz = y^2$, $x + y + x = 20$, $x^2 + y^2 + z^2 = 140$. Con l'aiuto di queste equazioni e delle regole date, si troveranno i valori di x, y, z.

Problema 23. Qual è il numero il cui triplo supera di 20 i suoi $\frac{5}{3}$?

Poniamo il numero cercato uguale a x; traduciamo in linguaggio algebrico il testo del problema

Problema enunciato in linguaggio ordinario	*Lo stesso in linguaggio algebrico*
Qual è il numero	x
il cui triplo	$3x$
i suoi $\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}x$
supera di 20 i suoi $\frac{3}{5}$	$3x = 20 + \frac{5}{3}x$

L'ultima riga contiene l'equazione che risolve il problema.

$$3x = 20 + \frac{5}{3}x$$

$$3x - \frac{5}{3}x = 20$$

$$\frac{4}{3}x = 20 \quad x = 20 \cdot \frac{3}{4} = 15$$

Problema 24. Determinare due numeri consecutivi pari tali che dividendo il doppio del maggiore per il minore si ottenga per quoziente 2 e per resto 2.

Soluzione. Si tratta di ricordare il significato dei termini relativi all'operazione della divisione, dove a è il dividendo, b il divisore, q il quoziente e r il resto. Due numeri pari consecutivi sono del tipo $n, n+2$. Riscriviamo

$$a = b \cdot q + r$$

Pertanto detto x il primo numero pari e $x+2$ il consecutivo, avremo

$$2(x+2) = 2x + 2$$

dividiamo tutto per

$$x + 2 = x + 1$$

da cui

$$0x = -1 \quad \textit{impossibile}$$

Problema 25. L'età di una madre supera di 18 anni la somma delle età delle due figlie e l'età della figlia maggiore è i $\frac{5}{3}$ dell'età della sorella. Determinare le loro età sapendo che fra due anni l'età della madre sarà il triplo di quella della figlia maggiore.

Soluzione. Traduciamo in linguaggio algebrico le diverse relazioni presenti. Innanzitutto scegliamo l'età della sorella minore come valore incognito x, per cui l'età della sorella maggiore sarà uguale a $\frac{5}{3}x$.

Avremo ora due relazioni, la prima collega l'età della madre all'età della sorella maggiore e la seconda collega le età di tutte e tre le persone;

L'età della madre la ricaviamo attraverso il suo legame con l'età della figlia maggiore con entrambe due anni in più, cioè

$$e_{madre}+2=3\left(\frac{5}{3}x+2\right)$$

cioè

$$e_{madre}=5x+6-2=5x+4$$

L'equazione risolvente sarà pertanto

$$x+\frac{5}{3}x+18=5x+4$$

svolgiamo

$$\frac{8}{3}x-5x=-14 \quad -\tfrac{7}{3}x=-14$$

da cui

$$x=6$$

La sorella minore ha 6 anni, la sorella maggiore $\frac{5}{3}\cdot 6=10$ e la madre $5\cdot 6+4=34$.

Problema 26. Un negoziante vende prima $\frac{1}{4}$ di un pezzo di stoffa, poi i $\frac{2}{3}$ della stoffa rimanente; determinare la lunghezza della pezza sapendo che dopo le due vendite ne rimangono $15\,m$.

Soluzione. Tipico problema sul significato delle frazioni, intese come valore relativo di una quantità data. Il valore incognito da ricavare è in questo caso la lunghezza totale della stoffa prima della vendita. Poniamo questo valore uguale a x.

La prima vendita sarà di $\frac{1}{4}x$, ma la seconda, calcolata sulla lunghezza rimanente avrà come nuovo intero di riferimento la parte rimasta, cioè $x-\frac{1}{4}x=\frac{3}{4}x$. Per cui i $\frac{2}{3}$ di questa quantità riferita ora alla lunghezza iniziale sarà

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}x=\frac{1}{2}x$$

L'equazione risolvente esprimerà che la somma delle due vendite e della parte rimasta è uguale alla pezza di stoffa iniziale

$$\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}x+15=x$$

svolgiamo

$$\frac{3}{4}x-x=-15 \quad \tfrac{1}{4}x=15$$

da cui

$$x=60$$

La pezza di stoffa è lunga $60\,m$.

Problema 27. Un'asta, alta $15\,m$, deve essere divisa in tre parti, in modo che la prima parte superi la seconda di $21\,dm$ e la seconda superi di $26\,dm$ i $\frac{3}{5}$ della terza. seconda Determinare la lunghezza di ciascuna parte.

Soluzione. Indichiamo con x la lunghezza della parte, perché nota tale parte si potrà poi calcolare le altre due.

La somma delle tra parti è uguale a $15\,m$: in linguaggio algebrico

$$l_1 + l_2 +_3 = 15$$

ora, come detto, poniamo $x = l_3$; pertanto $l_2 = \frac{3}{5}x + 26$ e infine $l_1 = l_2 + 21$, cioè $l_1 = \frac{3}{5}x + 26 + 21$. Possiamo ora scrivere l'equazione risolvente, ricordando che $15\,m = 150\,dm$

$$\left(\frac{3}{5}x + 47\right) + \left(\frac{3}{5}x + 26\right) + x = 150$$

$$\frac{6}{5}x + x = 150 - 73$$

$$\frac{11}{5}x = 77 \quad x = 77 \cdot \frac{5}{11} = 35$$

pertanto

$$l_3 = 35\,dm \quad l_2 = 47\,dm \quad l_1 = 68\,dm$$

Problema 28. In una vendita di fine stagione, una merce viene venduta con lo sconto del 20%. Al momento dell'acquisto viene accordato un ulteriore sconto del 10% e così l'acquirente paga €450. Qual era il prezzo primitivo di quella merce?

Soluzione. I problemi con le percentuali sono in tutto identici a quelli con le frazioni, essendo le percentuali solo frazioni con denominatore 100. Il costo iniziale del prodotto è incognito, e lo indichiamo con x. Sappiamo poi che il costo iniziale è ridotto del 20% e passando alla cassa si ottiene un ulteriore sconto sul costo rimanente del 10%.

Allora, la prima riduzione fa sì che il costo del prodotto sia uguale all'80% di quello iniziale e, riducendo ancora del 10% questo 80% si ha un costo finale di $80\% - 8\% = 72\% = \frac{72}{100} = 0,72$.
Ora, questo 72% corrisponde a 450 euro, cioè il prezzo finale pagato, per cui

$$450 : 0,72 = 625$$

Il prezzo iniziale della merce è di 625 euro.

Problema 29. Trovare un numero di due cifre sapendo che la cifra delle unità supera di 2 la cifra delle decine e che il numero è il quadruplo della somma delle sue cifre.

Soluzione. Sappiamo che nel sistema di numerazione posizionale e decimale ogni decina è uguale a 10 unità. Poniamo la cifra delle decine uguale a x, cioè $d = x$, per cui $u = x + 2$.

Ora, il numero sarà du, per cui

$$4\,(x + x + 2) = 10x + x + 2$$

svolgendo

$$8x + 8 = 11x + 2$$

$$3x = 6 \quad x = 2$$

La cifra delle decine è pertanto 2 e quella delle unità è 4. Nel nostro sistema di numerazione il numero è quindi 24.

Problema 30. Si narra che sulla tomba del celebre matematico greco Diofanto fosse scolpita la seguente iscrizione: «Qui Diofanto ha la sua tomba che a te rivela con l'aritmetica quanti anni egli visse. Egli passò $\frac{1}{6}$ della vita nell'infanzia, $\frac{1}{12}$ nell'adolescenza, $\frac{1}{7}$ nella giovinezza. Poi si ammogliò e dopo 5 anni ebbe un figlio che visse la metà della vita del padre; il padre gli sopravvisse ancora 4 anni mitigando il suo dolore con lo studio dell'aritmetica». A che età morì Diofanto?

Soluzione. Gli anni fino alla giovinezza compresa e al matrimonio sono

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}\right)x=\frac{33}{84}x$$

Prima della nascita del figlio passano ancora altri 5 anni, per cui

$$\frac{33}{84}x+5$$

Ora il padre sopravvive altri 4 anni alla morte del figlio, cioè

$$\frac{33}{84}x+9$$

Il tempo compreso tra la nascita e la morte del figlio è uguale alla metà dell'età totale del padre, cioè a

$$\frac{1}{2}x$$

Pertanto

$$\frac{33}{84}x+9=\frac{1}{2}x$$

svolgendo

$$\frac{9}{84}x=9 \quad x=84$$

Problema 31. Due mattoni pesano un chilogrammo più tre mezzi mattoni. Quanto pesa un mattone, supponendo che tutti i mattoni considerati siano di ugual peso?

Soluzione. Non c'è bisogno di particolari calcoli. Tre mezzi mattoni hanno il peso di un mattone e mezzo. Infatti $3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=1,5$. Allora se x è il peso uguale di ogni mattone

$$x-\frac{1}{2}x=1$$

$$\frac{1}{2}x=1$$

$$x=2$$

Problema 32. La velocità di un aereo è sei volte quella di un treno. Determinare la loro velocità, sapendo che in tre ore l'aereo percorre 1500 km più del treno.

Soluzione. Bisogna ricordare che lega la velocità alla distanza e al tempo impiegato a percorrerla. Dalla fisica, abbiamo

$$v = \frac{s}{t} \quad s = vt$$

dove v è la velocità, s la distanza percorsa e t il tempo impiegato. Sappiamo che $v_{aereo} = 6v_{treno}$. Il tempo considerato di 3 ore è lo stesso per entrambi i veicoli. L'altra informazione ci dice che a parità di tempo

$$s_{aereo} = s_{treno} + 1500$$

Allora

$$v_{aereo} \cdot 3 = v_{treno} \cdot 3 + 1500$$

dividendo per 3

$$v_{aereo} = v_{treno} + 500$$

ma

$$6v_{treno} = v_{treno} + 500$$

da cui

$$v_{treno} = 100\,\tfrac{km}{h} \quad v_{aereo} = 600\,\tfrac{km}{h}$$

Problema 33. Due macchine producono complessivamente 72 pezzi in un certo tempo. Per confezionare un pezzo, la prima macchina impiega 40 secondi e la seconda 50 secondi. Determinare quanti pezzi ha prodotto ciascuna macchina e per quanto tempo ciascuna ha lavorato.

Soluzione. Troviamo il mcm tra i due tempi per avere un confronto a parità di una grandezza. Allora in $200\,s$ la prima macchina produce 5 pezzi, la seconda 4. Estrapolando se x è il numero dei pezzi della seconda macchina, allora, a parità di tempo, la prima produrrà $\frac{5}{4}x$; pertanto

$$x + \frac{5}{4}x = 72$$

$$\tfrac{9}{4}x = 72 \quad x = 32$$

La prima macchina avrà allora prodotto 40 pezzi e la seconda 32

La prima macchina impiegherà per i 40 pezzi

$$40 \times 40s = 1600s = \frac{1600}{60} = 26\frac{2}{3}\,min = 26^m 40^s$$

la seconda macchina impiegherà lo stesso tempo; infatti $32 \times 50s = 1600s$

Problema 34. Una biblioteca acquista nuovi volumi incrementando così del 25% la sua dotazione. L'anno successivo vengono effettuati ulteriori acquisti, incrementando in tal modo la dotazione del 10% rispetto ai volumi posseduti al momento dell'acquisto. Sapendo che nei due anni sono stati acquistati 6000 volumi, quanti volumi possiede ora la biblioteca?

Soluzione. Indichiamo con x il n° di volumi iniziali. Dopo il primo acquisto i volumi diventano

$$x + 25\%x = x + \frac{25}{100}x = \frac{5}{4}x$$

Il secondo acquisto incremento ancora i $\frac{5}{4}x$ del 10%, cioè

$$\frac{5}{4}x+\frac{1}{10}\times\frac{5}{4}x=\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{8}\right)x=\frac{11}{8}x$$

allora l'incremento totale è uguale a

$$\frac{11}{8}x-\frac{8}{8}x=\frac{3}{8}x=6000$$

da cui i volumi iniziali sono

$$x=6000\times\tfrac{8}{3}=16000$$

Pertanto il numero totale finale dei libri della biblioteca è

$$16000+6000=22000$$

Problema 35. Determinare gli angoli di un triangolo sapendo che il primo è i $\frac{4}{3}$ del secondo e che il terzo angolo supera di 30° il secondo.

Soluzione. Dai dati possiamo osservare che il triangolo è sicuramente scaleno, avendo i tre angoli tutti diversi. Indichiamo gli angoli con α, il primo, β, il secondo e γ il terzo. Per trovare l'equazione risolvente, poniamo $\beta=x$, per cui, $\alpha=\frac{4}{3}x$ e $\gamma=x+30$. Sappiamo, anche senza che venga specificato nei dati, che la somma degli angoli interni di un qualsiasi triangolo è uguale a un angolo piatto, per cui

$$\frac{4}{3}x+x+x+30=180$$

$$\frac{10}{3}x=150$$

da cui

$$x=150\times\tfrac{3}{10}=45$$

Gli angoli misureranno $\beta=45°$, $\gamma=75°$, $\alpha=60°$

Problema 36. In un rettangolo l'altezza è i $\frac{3}{8}$ della base e la somma dei $\frac{3}{4}$ della base con i $\frac{4}{3}$ dell'altezza è $20\,cm$. Determinare il perimetro e l'area del rettangolo.

Soluzione. Qui abbiamo due relazioni che legano tra loro i lati del rettangolo. Indichiamo la misura della base con x; ne segue che l'altezza è uguale a $\frac{3}{8}x$. Utilizziamo la seconda relazione per ottenere la nostra equazione risolvente

$$\frac{3}{4}x+\frac{4}{3}\left(\frac{3}{8}x\right)=20$$

$$\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}x=20$$

da cui

$$\frac{5}{4}x=20 \quad x=20\times\tfrac{4}{5}=16$$

la base misura $16\,cm$ e l'altezza $16\times\frac{3}{8}=6$.

Troviamo il perimetro

$$2p=2\,(16+6)=44\,cm$$

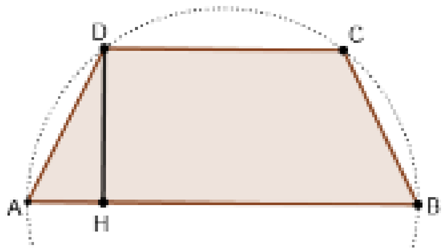
e l'area

$$A=16\times 6=96\,cm^2$$

Problema 37. Nel trapezio isoscele ABCD si ha: $\overline{AD} = \overline{BC}$; $\overline{AB} > \overline{DC}$; $DH \perp AB$. Si sa inoltre che è

$$\overline{DH} = \frac{15}{17}\overline{AD} \quad \frac{2}{3}\overline{AD} + \frac{1}{5}\overline{DH} = \overline{DC} \quad \overline{DC} = 129\,cm$$

Soluzione. In questo caso possiamo disegnare anche la figura per una migliore visualizzazione del problema geometrico. (Per disegnare correttamente un trapezio, ricordiamo che è sempre inscrivibile in una semicirconferenza.



Indichiamo la misura del lato obliquo con x, cioè $\overline{AD} = x$ e quindi $\overline{DH} = \frac{15}{17}x$ e la base minore DC è

$$\overline{DC} = \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}\left(\frac{15}{17}x\right) = \frac{2}{3}x + \frac{3}{17}x = \frac{43}{51}x$$

Pertanto utilizzando la misura assegnata della base minore, possiamo scrivere l'equazione risolvente

$$\frac{43}{51}x = 129 \quad x = 129 \times \tfrac{51}{43} = 153$$

il lato obliquo misura $\overline{AD} = 153\,cm$ e l'altezza $\overline{DH} = 153 \times \frac{15}{17} = 135\,cm$.

Ora, essendo il trapezio isoscele (osserviamo la figura)

$$\overline{AB} = \overline{DC} + 2 \cdot \overline{AH}$$

Per trovare $\overline{AH}$ ricorriamo l'inverso del teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo AHD; avremo

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{DH}^2} = \sqrt{153^2 - 135^2} = 72\,cm$$

da cui

$$\overline{AB} = 129 + 2 \times 72 = 273\,cm$$

Troviamo ora il perimetro

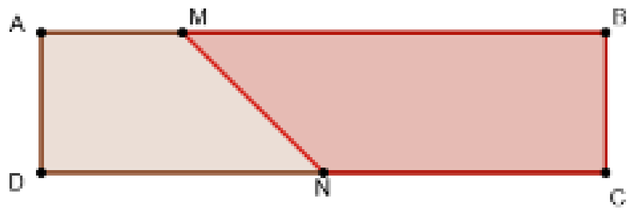
$$2p = 273 + 129 + 2 \times 153 = 708\,cm$$

e l'area

$$A = \frac{(273 + 129) \times 135}{2} = 27135\,cm^2$$

Esercizio 38. Il perimetro del rettangolo ABCD è $50\,dm$ e la base $AB = 20\,dm$ Determinare un punto M sul lato AB e un punto N sul lato CD in modo che sia $NC = 2AM$ e che l'area del trapezio MBCN sia $65\,dm^2$.

Soluzione. Disegnare la figura per una migliore visualizzazione del problema geometrico e per la migliore scelta dell'incognita.



Se il perimetro è $50\,dm$, il semiperimetro, cioè la somma della base e dell'altezza, è $25\,dm$, per cui il lato $BC = 5\,dm$.

Dovendo fissare il punto M, è utile scegliere $AM = x$ e quindi $NC = 2x$.

Il trapezio MBCN è rettangolo e quindi BC è la sua altezza. Scriviamo la relazione che esprime l'area di questo trapezio sapendo che la base maggiore $MB = AB - AM = 20 - x$; essa rappresenta la nostra equazione risolvente

$$A = \frac{(20 - x + 2x) \times 5}{2} = 65$$

$$5\,(20 + x) = 130$$

$$5x = 30 \quad x = 6$$

Il segmento AM che identifica la posizione del punto M è $AM = 6\,dm$, mentre $NC = 12\,dm$.

Esercizio 39. In un parallelepipedo rettangolo, avente il perimetro della base di $22,4\,dm$, un lato della base è i $\frac{3}{5}$ dell'altro. Determinare gli spigoli del parallelepipedo, sapendo che la superficie laterale è di $224\,dm^2$.

Soluzione. Gli spigoli sono ovviamente le tre dimensioni del solido e la superficie laterale è la somma delle aree dei poligoni che lo formano escluse le due basi. Il solido ha la base rettangolare, per cui la somma dei due lati è $11,2\,dm$.

Troviamo i due lati della base ponendo il lato maggiore uguale a x:

$$x + \frac{3}{5}x = 11,2 \quad \frac{8}{5}x = 11,2 \quad x = 7$$

I lati della base saranno perciò $7\,dm$ e $4,2\,dm$ e rappresentano i primi due spigoli del solido. Per trovare l'altezza del parallelepipedo utilizziamo la formula che consente il calcolo della superficie laterale

$$S_L = p_{base} \cdot h$$

da cui

$$h = \frac{S_L}{p_{base}} = \frac{224}{22,4} = 10\,dm$$

Esercizio 40. In un triangolo isoscele, di base BC, si ha $AB = \frac{5}{6}BC$ e che $AB + BC = 99\,cm$. Il triangolo è base di un prisma retto la cui altezza è i $\frac{5}{9}$ del perimetro della base. Dopo aver determinato i lati del triangolo di base ABC, trovare la superficie totale e il volume del prisma.

Soluzione. BC è la base del triangolo isoscele, mentre AB è uno dei due lati obliqui uguali. Conosciamo il rapporto e la somma tra i due lati del triangolo isoscele, per cui, posto $BC = x$, si ha

$$x + \frac{5}{6}x = 99 \quad \frac{11}{6}x = 99 \quad x = 54$$

Il triangolo isoscele ha i lati $BC = 54\,cm$, $AC = AB = 45\,cm$ e il perimetro è

$$p_{base} = 54 + 2 \times 45 = 144\,cm$$

Troviamo ora l'altezza del prisma

$$h = \frac{5}{9} \cdot 144 = 80\,cm$$

per cui la superficie laterale è

$$S_L = p_{base} \cdot h = 144 \times 80 = 11520\,cm^2$$

Per trovare l'area delle basi, cioè dei due triangoli isoscele uguali, ricorriamo al teorema di Pitagora per trovare l'altezza, AH, di tale triangolo

$$AH = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{45^2 - 27^2} = 36\,cm$$

L'area è

$$A_{triang} = \frac{54 \times 36}{2} = 972\,cm^2$$

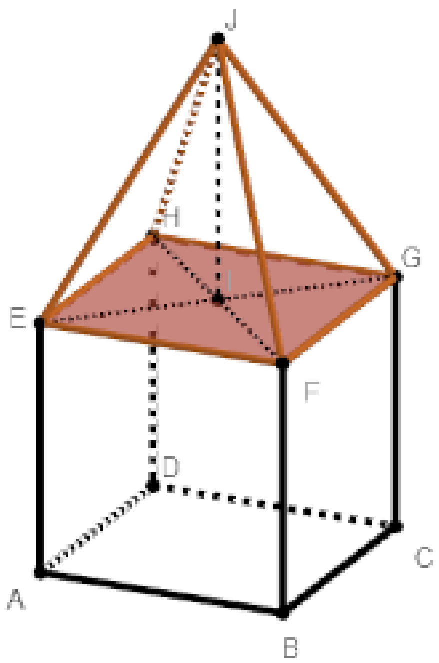
Troviamo la superficie totale del prisma

$$S_T = S_L + 2A_{base} = 11520 + 2 \times 972 = 13464\,cm^2$$

e ora il volume

$$V = A_{base} \cdot h = 972 \times 80 = 77760\,cm^3$$

Esercizio 41. Un solido è formato da un cubo sormontato da una piramide retta avente per base una faccia del cubo. Lo spigolo del cubo è i $\frac{5}{7}$ dello spigolo laterale della piramide e la somma di tutti gli spigoli del solido è di $352\,cm$. Trovare gli spigoli del solido



Soluzione. Gli spigoli del solido sono rappresentati dallo spigolo del cubo e dal lato obliquo che forma i triangoli della superficie laterale della piramide. Per cui, posto $EF = x$, si ha $AB = \frac{5}{7}x$.

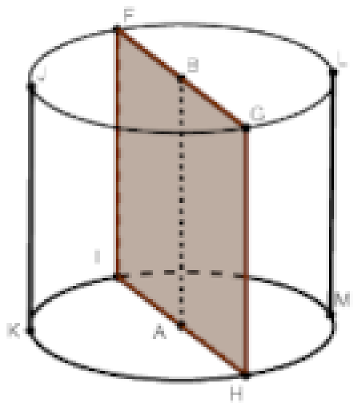
Possiamo scrivere l'equazione

$$4x + 12 \times \frac{5}{7}x = 352$$

$$\frac{88}{7}x = 352 \quad x = 28$$

per cui $EF = 28\,cm$ e $AB = 20\,cm$

Esercizio 42. In un cilindro il raggio è $\frac{2}{5}$ dell'altezza e la sezione fatta con un piano passante per l'asse è un rettangolo di perimetro $43,20$ cm. Trovare il volume del cilindro.



Soluzione. Posta l'altezza $HG = x$, si ha il raggio $AH = \frac{2}{5}x$ e il diametro $HI = \frac{4}{5}x$. Come si vede nella figura il diametro e l'altezza del cilindro sono i lati del rettangolo della sezione passante per l'asse del cilindro. Essendo noto il suo perimetro e quindi il suo semi perimetro, possiamo scrivere

$$x + \frac{4}{5}x = 21,60$$

$$\frac{9}{5}x = 21,60 \quad x = 12$$

Pertanto $HG = 12\,cm$ e $AH = 12 \times \frac{2}{5} = 4,8\,cm$.

Il volume del cilindro è

$$V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot 4,8^2 \cdot 12 = 276,48\pi\,cm^3$$

Equazioni letterali

Le equazioni letterali introducono una o più lettere, di solito le prime dell'alfabeto, che hanno il compito di presentare non più una singola equazione, ma una famiglia di equazioni di primo grado, caratterizzato dall'incognita x. Le soluzioni contenenti i parametri, che possono assumere qualsiasi valore reale, vanno pertanto discusse, in particolare quando i parametri compaiono in operazioni non sempre definite, come la divisione, l'estrazione della radice di indice pari.

Esercizio 43. Risolvere $3x - 5a = 2(x - a) - (a + x)$

Soluzione. Risolviamo utilizzando sempre i criteri di equivalenza. Il parametro a è considerato facente parte del termine noto che si presenta ora sotto forma di polinomio.

$$3x-5a=2x-2a-a-x$$

$$3x-2x+x=5a-2a-a$$

$$2x=2a \quad x=a$$

Le soluzioni sono accettabili per qualunque valore di a.

Esercizio 44. Risolvere $2m-2^2(x-m)=-3^2+4(2x+m)$

Soluzione. Risolviamo utilizzando sempre i criteri di equivalenza. Il parametro m è considerato facente parte del termine noto che si presenta ora sotto forma di polinomio.

$$2m-4x+\cancel{4m}=-9+8x+\cancel{4m}$$

$$-4x-8x=-2m-9$$

$$-12x=-2m-9 \quad x=\frac{2m+9}{12}$$

Esercizio 45. Risolvere $a^2(x+1)+x-b^2(2-x)=\left(a^2+b^2\right)x+a(a+2)-3b^2$

Soluzione. Risolviamo utilizzando sempre i criteri di equivalenza. Entrambi i parametri fanno parte del termine noto che si presenta ora sotto forma di polinomio.

$$\cancel{a^2x}+\cancel{a^2}+x-2b^2+\cancel{b^2x}=\cancel{a^2x}+\cancel{b^2x}+\cancel{a^2}+2a-3b^2$$

$$x=2b^2+2a-3b^2$$

$$x=2a-b^2$$

Esercizio 46. Risolvere $3x-(x+a)=2(x+a)-4a$

Soluzione. Risolviamo utilizzando sempre i criteri di equivalenza.

$$3x-x-a=2x+2a-4a$$

$$3x-x-2x=a+2a-4a$$

$$0x=-2a$$

In questo caso è necessaria una discussione riguardante i possibili diversi valori di a, perché
se $a=0$, allora l'equazione è $0=0$, cioè indeterminata.
se $a\neq 0$, allora l'equazione è $0=-2a\neq 0$, cioè impossibile.

Esercizio 47. Risolvere $3a(x-3a+2)=x+1$

Soluzione. Risolviamo utilizzando sempre i criteri di equivalenza.

$$3ax-9a^2+6a=x+1$$

$$3ax-x=9a^2-6a+1$$

in questo caso anche il coefficiente della x sarà formato da un polinomio

$$x\left(3a-1\right)=\left(3a-1\right)^2$$

dovendo dividere tutto per $3a-1$, si dovrà studiare l'esistenza di tale polinomio in base ai valori di a

se $a=\frac{1}{3}$, allora l'equazione è $0=0$, cioè indeterminata.

se $a\neq\frac{1}{3}$, allora l'equazione è

$$x=\frac{\left(3a-1\right)^2}{3a-1}=3a-1$$

Esercizio 48. Risolvere $2\left(ax-1\right)=b$

Soluzione. Risolviamo utilizzando sempre i criteri di equivalenza.

$$2ax-2=b$$

$$2ax=2+b$$

in questo caso sia il coefficiente della x che il termine noto contengono parametro pure diversi

dovendo dividere tutto per $2a$, si dovrà studiare l'esistenza di tale polinomio in base ai valori di a, considerando contemporaneamente anche i possibili valori di b

se $a=0\wedge b=-2$, allora l'equazione è $0=0$, cioè indeterminata.

se $a=0\wedge b\neq-2$, allora l'equazione è $0=2+b$, cioè impossibile

se $a\neq0\wedge b\neq-2$, allora

$$x=\frac{2+b}{2a}$$

Esercizio 49. Risolvere $4bx-\left(b+a\right)x=\left(b-a\right)\left(x+1\right)$

Soluzione. Risolviamo utilizzando sempre i criteri di equivalenza.

$$4bx-bx\cancel{-ax}=bx+b\cancel{-ax}-a$$

$$2bx=b-a$$

in questo caso sia il coefficiente della x che il termine noto contengono parametro pure diversi e dovendo dividere tutto per $2b$, si dovrà studiare l'esistenza di tale polinomio, considerando contemporaneamente anche i possibili valori di b

se $b=0\wedge a=0$, allora l'equazione è $0=0$, cioè indeterminata.

se $b=0\wedge a\neq0$, allora l'equazione è $0=-a$, cioè impossibile

se $b\neq0$, allora

$$x=\frac{b-a}{2b}$$

Esercizio 50. Risolvere $x(x-2a)+(b-a)(b+a)=(x-2)(x+2)+4+4a(a+x)$

Soluzione. Risolviamo utilizzando sempre i criteri di equivalenza e ricordando i prodotti notevoli

$$\cancel{x^2}-2ax+b^2-a^2=\cancel{x^2}\cancel{-4+4}+4a^2+4ax$$

$$-2ax-4ax=a^2+4a^2-b^2$$

$$-6ax=5a^2-b^2$$

studiamo le condizioni
se $a=0 \wedge b=0$, allora l'equazione è $0=0$, cioè indeterminata.
se $a=0 \wedge b\neq 0$, allora l'equazione è $0=-b^2$, cioè impossibile
se $a\neq 0$, allora

$$x=\frac{b^2-5a^2}{6a}$$

Esercizio 51. Risolvere

$$\frac{x-a-4}{3a}+\frac{x+a}{a}=\frac{x+1}{3}$$

Soluzione. Questa è una equazione a coefficienti letterali frazionari. Bisogna quindi introdurre sin dall'inizio le condizioni di validità dei denominatori, cioè $a\neq 0$;il mcm è $3a$

$$\frac{x-a-4+3x+3a-ax-a}{3a}=0$$

$$4x-ax=4-a$$

$$x(4-a)=4-a$$

dovendo dividere per $4-a$, studiamo le condizioni
se $a=0$, allora l'equazione perde di significato, come già indicato nelle condizioni di esistenza dei denominatori
se $a=4$, allora l'equazione è $0=0$, cioè indeterminata.
se $a\neq 4 \wedge a\neq 0$, allora

$$x=1$$

Esercizio 52. Risolvere

$$\frac{x}{a+1}+\frac{x-1}{a-1}=1$$

Soluzione. Questa è una equazione a coefficienti letterali frazionari. Bisogna quindi introdurre sin dall'inizio le condizioni di validità dei denominatori, cioè $a\neq \pm 1$;il mcm è $(a-1)(a+1)$

$$\frac{x(a-1)+(x-1)(a+1)-(a-1)(a+1)}{(a-1)(a+1)}=0$$

moltiplichiamo tutto per il mcm, tenendo conto delle condizioni poste sul parametro a. Proviamo a svolgere utilizzando la proprietà distributiva della moltiplicazione

$$x(a-1)+x(a+1)-a\cancel{-1}-a^2\cancel{+1}=0$$

raccogliamo

$$x\left(\cancel{a-1}+\cancel{a+1}\right)=a^2+a$$

$$2ax=a\left(a+1\right)$$

dovendo dividere per a, studiamo le condizioni

se $a=0$, allora l'equazione diviene $0=0$, cioè indeterminata

se $a=\pm1$, l'equazione perde di significato e non si potrebbe nemmeno svolgere il calcolo mostrato

se $a\neq 0\wedge a\neq\pm1$, allora

$$x=\frac{a+1}{2}$$

Esercizio 53. Risolvere

$$\frac{x-3a}{2-a}+\frac{\left(x-2a\right)\left(a-1\right)}{4-4a+a^2}=1$$

Soluzione. Scomponiamo prima il polinomio di 2° grado al denominatore

$$\frac{x-3a}{2-a}+\frac{\left(x-2a\right)\left(a-1\right)}{\left(2-a\right)^2}=1$$

Questa è una equazione a coefficienti letterali frazionari. Bisogna quindi introdurre sin dall'inizio le condizioni di validità dei denominatori, cioè $a\neq 2$; il mcm è $\left(2-a\right)^2$

$$\frac{\left(x-3a\right)\left(2-a\right)+\left(x-2a\right)\left(a-1\right)-\left(2-a\right)^2}{\left(2-a\right)^2}=0$$

moltiplichiamo tutto per il mcm, tenendo conto delle condizioni poste sul parametro a. Proviamo a svolgere utilizzando la proprietà distributiva della moltiplicazione

$$x\left(2-a\right)\cancel{-6a}+\cancel{3a^2}+x\left(a-1\right)\cancel{-2a^2}+\cancel{2a}-4+\cancel{4a}\cancel{-a^2}=0$$

raccogliamo

$$x\left(2\cancel{-a}\cancel{+a}-1\right)=4$$

basta, in questo caso, riprendere le condizioni poste all'inizio

se $a=2$, l'equazione perde di significato e non si potrebbe nemmeno svolgere il calcolo mostrato

se $a\neq 2$, allora

$$x=4$$

Esercizio 54. Risolvere

$$\frac{2x}{1+3a}-\frac{1}{3a^2-a}+\frac{\left(1+3a^2\right)x}{a}=a\left(1+x\right)-\frac{2}{1-9a^2}$$

Soluzione. Scomponiamo dapprima i polinomi al denominatore per calcolare poi il mcm

$$\frac{2x}{1+3a}-\frac{1}{a\left(3a-1\right)}+\frac{\left(1+3a^2\right)x}{a}=a\left(1+x\right)-\frac{2}{\left(1-3a\right)\left(1+3a\right)}$$

Poiché $1-3a=-\left(3a-1\right)$ e $1+3a=3a+1$, possiamo riscrivere

$$\frac{2x}{1+3a}-\frac{1}{a\left(3a-1\right)}+\frac{\left(1+3a^3\right)x}{a}=a\left(1+x\right)+\frac{2}{\left(3a-1\right)\left(1+3a\right)}$$

il mcm è $a(3a-1)(3a+1)$, e affinché l'equazione abbia significato, dovrà essere $a \neq \pm\frac{1}{3}$. Moltiplichiamo i due membri per il mcm

$$2ax(3a-1)-(3a+1)+\left(1+3a^3\right)\left(9a^2-1\right)x = a^2(1+x)\left(9a^2-1\right)+2a$$

$$2ax(3a-1)-3a-1+x\left(9a^2-1+27a^5-3a^3\right) = 9a^4-a^2+x\left(9a^4-a^2\right)+2a$$

$$x\left(6a^2-2a\right)+x\left(27a^5-3a^3+9a^2-1\right)-x\left(9a^4-a^2\right) = 9a^4-a^2+2a+3a+1$$

il calcolo è certamente più impegnativo e la scelta è quella di evitare un'eccessiva quantità di termini da gestire. Raccogliamo ora la x al primo membro

$$x\left(6a^2-2a+27a^5-3a^3+9a^2-1-9a^4+a^2\right) = 9a^4-a^2+5a+1$$

$$x\left(27a^5+9a^4-3a^3+16a^2-2a-1\right) = 9a^4-a^2+5a+1$$

il coefficiente di x è sicuramente di difficile scomposizione; dividendo i due polinomi si trova

$$x(3a-1)\left(9a^4-a^2+5a+1\right) = 9a^4-4^2+5a+1$$

pertanto

se $a = \frac{1}{3}$, l'equazione perde di significato e non si potrebbe nemmeno svolgere il calcolo mostrato

se $a \neq \frac{1}{3}$, poiché il polinomio $9a^4-a^2+5a+1$ è irriducibile, allora

$$x = \frac{1}{3a-1}$$

Esercizio 55. Risolvere

$$\frac{bx+1}{b-1}-\frac{bx-1}{b+2} = \frac{2b+7}{b^2+b-2}$$

Soluzione. Scomponiamo dapprima il polinomio al denominatore del 2°membro per calcolare poi il mcm

$$\frac{bx+1}{b-1}-\frac{bx-1}{b+2} = \frac{2b+7}{(b-1)(b+2)}$$

il mcm è $(b-1)(b+2)$, e affinché l'equazione abbia significato, dovrà essere $b \neq 1$, $b \neq -2$. Moltiplichiamo i due membri per il mcm

$$(bx+1)(b+2)-(bx-1)(b-1) = 2b+7$$

$$\cancel{b^2}x+2bx+b+2\cancel{-b^2}x+bx+b-1 = 2b+7$$

$$3bx = 6$$

pertanto

se $b = 0$, l'equazione diviene $0 = 6$, cioè impossibile

se $b \neq 0 \wedge b \neq 1 \wedge b \neq -2$, allora

$$x = \frac{2}{b}$$

Esercizio 56. Risolvere

$$\frac{x-5}{ab-2b+a-2}-\frac{x-1}{ab+2b-a-2}+\frac{2}{b^2-1} = 0$$

Soluzione. Scomponiamo dapprima i denominatori per calcolare poi il mcm

$$\frac{x-5}{b(a-2)+(a-2)}-\frac{x-1}{b(a+2)-(a+2)}+\frac{2}{(b-1)(b+1)}=0$$

$$\frac{x-5}{(a-2)(b+1)}-\frac{x-1}{(a+2)(b-1)}+\frac{2}{(b-1)(b+1)}=0$$

il mcm è $(b-1)(b+1)(a-2)(a+2)$, e affinché l'equazione abbia significato, dovrà essere $b\neq\pm1$, $a\neq\pm2$. Moltiplichiamo i due membri per il mcm

$$(x-5)(b-1)(a+2)-(x-1)(b+1)(a-2)+2\left(a^2-4\right)=0$$

$$x(b-1)(a+2)-5(b-1)(a+2)-x(b+1)(a-2)+(b+1)(a-2)+2a^2-8=0$$

$$x(\cancel{ab}+2b-a\cancel{-2}\cancel{-ab}+2b-a\cancel{+2})-5ab-10b+5a\cancel{+10}+ab-2b+a\cancel{-2}+2a^2\cancel{-8}=0$$

$$2x(2b-a)+2a^2-4ab-12b+6a=0$$

$$2x(2b-a)-2a(2b-a)-6(2b-a)=0$$

$$\cancel{2}x(2b-a)=\cancel{2}(2b-a)(a+3)$$

pertanto, esclusi di valori che rendono l'equazione priva di significato

se $b=a=0$, l'equazione diviene $0=0$, cioè indeterminata

se $b=\frac{a}{2}$, l'equazione diviene $0=0$, cioè indeterminata

se $(b=a)\neq0\ \wedge\ b\neq\frac{a}{2}\ \wedge\ b\neq\pm2\wedge\ a\neq\pm1$, allora

$$x=a+3$$

Esercizio 57. Risolvere

$$\frac{x-4}{a^2-4a+4}+\frac{x-1}{a^2-a-2}=\frac{2}{a-2}$$

Soluzione. Scomponiamo dapprima i denominatori per calcolare poi il mcm

$$\frac{x-4}{(a-2)^2}+\frac{x-1}{(a-2)(a+1)}=\frac{2}{a-2}$$

il mcm è $(a-2)^2(a+1)$, e affinché l'equazione abbia significato, dovrà essere $a\neq2$, $a\neq-1$. Moltiplichiamo i due membri per il mcm

$$(x-4)(a+1)+(x-1)(a-2)=2\left(a^2-a-2\right)$$

$$ax+x-4a\cancel{-4}+ax-2x-a+2=2a^2-2a\cancel{-4}$$

$$x(2a-1)=5a-2a+2a^2-2$$

$$x(2a-1)=2a^2+3a-2$$

il polinomio al secondo membro è divisibile per $2a-1$ e si può scomporre

$$x(2a-1)=(2a-1)(a+2)$$

pertanto, esclusi di valori che rendono l'equazione priva di significato

se $a=\frac{1}{2}$, l'equazione diviene $0=0$, cioè indeterminata

se $a=-2$, l'equazione diviene $-5x=0$, cioè impossibile

se $a=2\ \wedge\ a=-1$, l'equazione perde di significato

se $a\neq\frac{1}{2}\ \wedge\ a\neq-1\ \wedge\ a\neq\pm2\wedge\ a\neq-1$, allora

$$x=a+2$$

Dal generale al particolare

Esercizio 58. Risolvere l'equazione

$$\frac{x-1}{4}+\frac{a+1}{a}=\frac{7+x}{4a}$$

e dire per quale valore di a l'equazione può ammettere come soluzione $x=5$.

Soluzione. il mcm è $4a$, e affinché l'equazione abbia significato, dovrà essere $a\neq 0$. Moltiplichiamo i due membri per il mcm

$$ax-a+4a+4=7+x$$

$$ax-x=-3a+3$$

$$x(a-1)=-3(a-1)$$

pertanto, esclusi di valori che rendono l'equazione priva di significato

se $a=1$, l'equazione diviene $0=0$, cioè indeterminata

se $a\neq 1$ e $a\neq 0$, allora le soluzioni sono indipendenti da a

$$x=-3$$

essendo per $a=1$ l'equazione indeterminata, si può ottenere la soluzione $x=5$, così come infinite altre.

Esercizio 59. Risolvere l'equazione

$$a(x+1)=3ax-2(ax+1)$$

Sia A l'insieme delle soluzioni per $a=-2$ e B l'insieme delle soluzioni per $a=3$. Determinare gli insiemi $A\cap B$ e $A\cup B$.

Soluzione. Eseguiamo i calcoli

$$ax+a=3ax-2ax-2$$

$$a+2=0$$

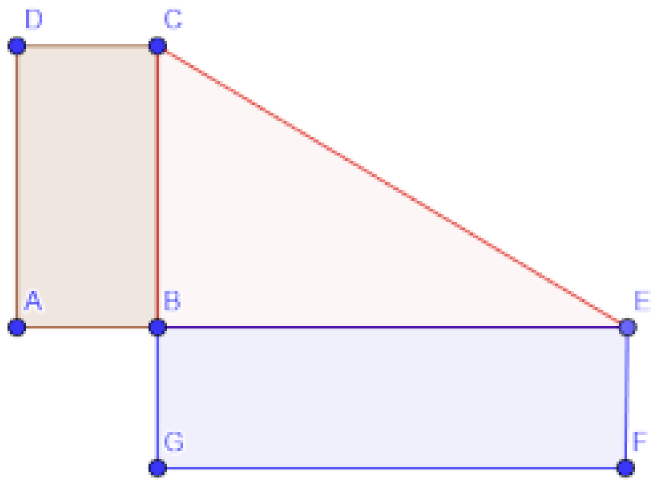
Se $a=-2$, si ha un'equazione indeterminata con infinite soluzioni

Se $a=3$, si ha $5=0$ e l'equazione è impossibile

Per cui $A\cap B=\emptyset$ e $A\cup B=\mathbb{R}$

Problemi

Problema 60. È dato il rettangolo ABCD di cui si conosce $\overline{AB}=b$, $\overline{BC}=a$ e sia $BC\geq 2AB$. Sul prolungamento di AB, oltre B, si prenda un punto E ($\overline{BE}=x$) in modo che il triangolo CBE sia equivalente alla somma del rettangolo di lati AB e BE con il rettangolo dato.



Soluzione. In questa caso il testo indica già la scelta del segmento incognito. Ricordiamo che le figure equivalenti hanno la stessa area.

L'area del rettangolo $ABCD$ è uguale ad $A_{ABCD} = ab$. Se $BE = x$, allora l'area del rettangolo $BEFG$ è $A_{BEFG} = bx$. Pertanto l'area del triangolo rettangolo CBE sarà $A_{CBE} = ab + bx$. L'area dello stesso triangolo si può esprimere anche come

$$A_{CBE} = \frac{ax}{2}$$

per cui

$$ab + bx = \frac{ax}{2}$$

$$2ab = ax - 2bx$$

$$x(a - 2b) = 2ab$$

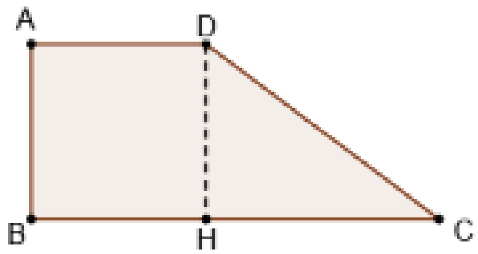
per cui

Se $a = 2b$ allora il problema risulta impossibile (la frazione perde di significato).

Se $a > 2b$

$$x = \frac{2ab}{a - 2b}$$

Problema 61. In un trapezio rettangolo la base minore e l'altezza hanno uguale lunghezza e la somma dei $\frac{4}{3}$ della base minore e dei $\frac{2}{7}$ della maggiore è $6a$. Determinare la lunghezza del perimetro sapendo che la somma delle basi è $10a$.



Soluzione. Poniamo la base minore $AD = x$; avremo anche $AB = x$. Conoscendo la somma delle due basi, ricaviamo $BC = 10a - x$. Ma la base è data dalla somma di due segmenti

$$BC = BH + HC$$

ed essendo $BH = AD$, avremo

$$BC = AD + HC \quad 10a - x = x \ + HC$$

per cui $HC = 10a - 2x$. Sappiamo inoltre che

$$\frac{4}{3}x + \frac{2}{7}(10a - x) = 6a$$

$$28x + 60a - 6x = 126a$$

$$22x = 66a$$

essendo a parte della misura di un segmento, possiamo considerarlo diverso da zero.

$$x = 3a$$

avremo quindi $AB = AD = 3a$ e $BC = 7a$; inoltre $HC = 4a$. Troviamo ora il lato obliquo con il teorema di Pitagora applicato al triangolo DHC

$$DC = \sqrt{9a^2 + 16a^2} = 5a$$

per cui

$$P = 3a + 3a + 7a + 5a = 18a$$

Problema 62. Due veicoli si muovono di moto uniforme con velocità v e v' partendo contemporaneamente dalle estremità di una strada lunga a e si vanno incontro. Dopo quanto tempo si incontreranno?

Soluzione. Un esempio preso dalla cinematica. Per moto uniforme si intende un moto nel quale la velocità rimane sempre costante nel tempo osservato. La relazione che descrive il legame tra la velocità, la strada percorsa e il tempo impiegato è dato da

$$v = \frac{s}{t}$$

dove v è la velocità costante, s la distanza percorsa e t il tempo impiegato. I due veicoli partono da posizioni opposte e si muovono in versi contrari, quindi tenderanno ad avvicinarsi sempre più. Nel momento del loro incontro, il tempo trascorso per entrambi sarà lo stesso. Chiamiamo questo tempo t. Avremo

$$s = vt \quad s' = v't$$

Indichiamo con x il tratto percorso dal veicolo con velocità v; l'altro veicolo percorrerà il tratto $a - x$

$$x = vt \quad a - x = v't$$

sostituiamo

$$a - vt = v't \quad a = t(v + v')$$

da cui

$$t = \frac{a}{v + v'}$$

Equazioni frazionarie numeriche

Esercizio 63. Determinare il dominio della seguente equazione frazionaria:

$$\frac{2x^2}{2x - 1} = x + 1$$

Soluzione. Ricordiamo che una equazione è detta frazionaria (o fratta) se l'incognita compare al denominatore di una o più frazioni. Si deve allora stabilire quali sono i valori di x per i quali la frazione non perde di significato, cioè per i quali la frazione non ha denominatore uguale a zero.

In questo caso abbiamo una sola frazione con denominatore $2x - 1$. Tale espressione si annulla se

$$x = \frac{1}{2}$$

Allora il dominio della equazione sarà rappresentato da tutti i valori appartenenti all'insieme dei numeri reali ad esclusione di $\frac{1}{2}$. In simboli

$$D = \forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Esercizio 64. Risolvere la seguente equazione frazionaria:

$$\frac{51}{3x-1} = \frac{62}{12x+5}$$

Soluzione. I denominatori si annullano per $x = \frac{1}{3}$ e $x = -\frac{5}{12}0$. Il domino sarà $D = \forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{12}; \frac{1}{3}\right\}$

Il $mcm = (3x-1)(12x+5)$ e moltiplicando tutto per il mcm nell'insieme definito dal dominio, riduciamo a intera la nostra equazione

$$51(12x+5) = 62(3x-1) = 0$$

$$612x + 255 = 186x - 62$$

$$426x = -317 \quad x = -\frac{317}{426}$$

la soluzione appartiene al dominio ed è pertanto accettabile.

Esercizio 65. Risolvere la seguente equazione frazionaria:

$$\frac{3-x}{1-x} - \frac{5-x}{7-x} = 1 - \frac{x^2-2}{x^2-8x+7}$$

Soluzione. Scomponendo il denominatore al secondo membro si ricava $x^2 - 8x + 7 = (x-1)(x-7) = (1-x)(7-x)$.

Il domino sarà $D = \forall x \in \mathbb{R} - \{1; 7\}$

Il $mcm = (1-x)(7-x)$ e moltiplicando tutto per il mcm nell'insieme definito dal dominio, riduciamo a intera la nostra equazione

$$(3-x)(7-x) - (5-x)(1-x) = \cancel{x^2} - 8x + 7 \cancel{-x^2} + 2$$

$$21 - 10x \cancel{+x^2} - 5 + 6x \cancel{-x^2} = -8x + 2$$

$$4x = -7 \quad x = -\frac{7}{4}$$

la soluzione appartiene al dominio ed è pertanto accettabile.

Esercizio 66. Risolvere la seguente equazione frazionaria:

$$\frac{3}{x+2} + \frac{5}{2-x} = 0$$

Soluzione. I denominatori si annullano per $x = \pm 2$. Il domino sarà $D = \forall x \in \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

Il $mcm = (x+2)(2-x)$ e moltiplicando tutto per il mcm nell'insieme definito dal dominio, riduciamo a intera la nostra equazione

$$3(2-x) + 5(x+2) = 0$$

$$6 - x + 5x + 10 = 0$$

$$4x = -16 \quad x = -4$$

la soluzione appartiene al dominio ed è pertanto accettabile.

Esercizio 67. Risolvere la seguente equazione frazionaria:

$$\frac{x-4}{x+2} = \frac{x-3}{x+1}$$

Soluzione. I denominatori si annullano per $x = -2$ e $x = -1$. Il domino sarà $D = \forall x \in \mathbb{R} - \{-2; -1\}$

Il $mcm = (x+2)(x+1)$ e moltiplicando tutto per il mcm nell'insieme definito dal dominio, riduciamo a intera la nostra equazione

$$\begin{gathered}(x-4)(x+1) = (x-3)(x+2) \\ \cancel{x^2} + x - 4x - 4 = \cancel{x^2} + 2x - 3x - 6 \\ x - 4x - 2x + 3x = 4 - 6 \\ -2x = -2 \quad x = 1\end{gathered}$$

la soluzione appartiene al dominio ed è pertanto accettabile.

Esercizio 68. Risolvere la seguente equazione frazionaria:

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+2}{x-1} + \frac{5x+1}{x^2-1} = 0$$

Soluzione. Osservando che $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, i denominatori si annullano per $x = \pm 1$. Il dominio sarà $D = \forall x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

Il $mcm = (x-1)(x+1)$ e moltiplicando tutto per il mcm nell'insieme definito dal dominio, riduciamo a intera la nostra equazione

$$\begin{gathered}(x-1)^2 - (x+2)(x+1) + 5x + 1 = 0 \\ \cancel{x^2} - 2x + 1 - \cancel{x^2} - x - 2x - 2 + 5x + 1 = 0 \\ 0x = 0\end{gathered}$$

l'equazione risulta indeterminata.

Esercizio 69. Risolvere la seguente equazione frazionaria:

$$\frac{1}{x^2-4x} + \frac{1}{x^2+x} = \frac{5x+10}{x^3-x^2-10x-8}$$

Soluzione. Iniziamo scomponendo i polinomi ai denominatori delle frazioni. Analizziamo polinomio di terzo grado ricordando il teorema di Ruffini per la scomposizione in fattori

$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 10(-1) - 8 = -1 - 1 + 10 - 8 = 0$; pertanto il polinomio è divisibile per $x+1$; utilizzando ora la regola di Ruffini per la divisione si ottiene $x^3 - x^2 - 10x - 8 = (x+1)\left(x^2 - 2x - 8\right) = (x+1)(x-4)(x+2)$

$$\frac{1}{x(x-4)} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{5x+10}{(x+1)(x-4)(x+2)}$$

I denominatori si annullano per $x = -1; -2; 0; 4$. Il dominio sarà $D = \forall x \in \mathbb{R} - \{-2; -1; 0; 4\}$

Il $mcm = x(x-4)(x+1)(x+2)$ e moltiplicando tutto per il mcm nell'insieme definito dal dominio, riduciamo a intera la nostra equazione

$$\begin{gathered}(x+1)(x+2) + (x+2)(x-4) = 5x^2 + 10x \\ x^2 + 2x + x + 2 + x^2 - 4x + 2x - 8 = 5x^2 + 10x \\ 2x^2 + x - 6 = 5x^2 + 10x \\ x^2 + 3x + 2 = 0\end{gathered}$$

scomponendo il polinomio di secondo grado, si ha

$$(x+1)(x+2) = 0$$

l'equazione è impossibile essendo entrambi i valori ottenibili con la legge dell'annullamento del prodotto non appartenenti al dominio.

Esercizio 70. Risolvere la seguente equazione frazionaria:

$$\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{2}{x^2-4x+3}$$

Soluzione. Iniziamo scomponendo i polinomi ai denominatori delle frazioni.

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)}-\frac{1}{(x-1)(x+3)}=\frac{2}{(x-1)(x-3)}$$

I denominatori si annullano per $x=-3;1;3;$. Il dominio sarà $D=\forall x\in\mathbb{R}-\{-3;1;3\}$

Il $mcm=(x-3)(x-1)(x+3)$ e moltiplicando tutto per il mcm nell'insieme definito dal dominio, riduciamo a intera la nostra equazione

$$\cancel{x}-1\cancel{-x}+3=2x+6$$

$$2x=-4$$

$$x=-2$$

la soluzione è accettabile appartenendo al dominio.

Problemi

Problema 71. Per coprire una certa distanza, un treno impiega un tempo uguale al sestuplo del tempo che impiegherebbe un aereo che viaggia ad una velocità di 600 km/h superiore a quella del treno. Determinare la velocità del treno.

Soluzione. Indichiamo la distanza, considerata come conosciuta, con d e la velocità incognita del treno con x. La relazione che lega queste tre grandezze è esprimibile come

$$v=\frac{d}{t}\quad o\quad d=vt$$

I tempi di percorrenza sono: per l'aereo t e per il treno $6t$; le velocità sono: per il treno x e per l'aereo $x+600$. Allora la distanza d è percorsa da entrambi

dal treno $d=6xt$; per l'aereo $d=(x+600)t$. Confrontando le due relazioni a parità di distanza percorsa, si ha

$$6xt=(x+600)t=xt+600t$$

$$5xt=600t\quad x=120$$

La velocità del treno è uguale a 120 km/h e quella dell'aereo a 720 km/h.

Problema 72. In un triangolo rettangolo un cateto supera l'altro di $10m$ e il rapporto tra la somma della terza parte del cateto minore con la quarta parte del maggiore e la somma dei cateti è $\frac{2}{7}$. Determinare la lunghezza del perimetro del triangolo.

Soluzione. La risoluzione del problema richiede una corretta interpretazione del testo e una sua precisa traduzione nel linguaggio matematico. Iniziamo indicando con x la misura del cateto minore.

(Ricordiamo che il termine rapporto si traduce con una divisione). Le relazioni ricavabili dal testo sono

$$cateto_m=x\quad cateto_M=x+10$$

$$\frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}(x+10)}{x+(x+10)}=\frac{2}{7}$$

Risolviamo

$$\frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x+\frac{5}{2}}{2x+10}=\frac{2}{7}$$

con $x\neq -5$; condizione sempre accettabile in un problema geometrica, in quanto le lunghezze dei segmenti sono sempre espresse mediante numeri positivi.

$$7\left(\frac{7}{12}x+\frac{5}{2}\right)=4x+20$$

$$\frac{49}{12}x-4x=20-\frac{35}{2}$$

$$\frac{1}{12}x=\frac{5}{2}$$

cioè

$$x=\frac{5}{2}\times 12=30$$

Il cateto minore è lungo $30\,m$ e quello maggiore $40\,m$. Ricordando le terne pitagoriche, possiamo subito ricavare la lunghezza dell'ipotenusa, uguale $50\,m$.

$$p=(30+40+50)\,m=120\,m$$

Equazioni frazionarie letterali

Esercizio 73. Risolvere la seguente equazione letterale frazionaria

$$\frac{a+x}{x-1}+\frac{a}{3x-3}=2$$

Soluzione. Iniziamo a determinare il dominio (o le condizioni di esistenza) delle frazioni: $x\neq 1$. Il $mcm=3\,(x-1)$

$$3a+3x+a=6\,(x-1)$$

$$3x-6x=-4a-6$$

$$3x=4a+6$$

In questo caso la soluzione generale è

$$x=\frac{4a+6}{3}$$

si devono ora discutere le eventuali soluzioni particolari in base ai valori di a

Se $a=-\frac{3}{4}$ allora $x=1$ e l'equazione diventa impossibile perché $x=1$ non appartiene al dominio.

Esercizio 74. Risolvere la seguente equazione letterale frazionaria

$$\frac{x+2a}{x-2a}-\frac{x-2a}{x+2a}=\frac{4x\,(2a-1)+3}{x^2-4a^2}$$

Soluzione. Iniziamo a determinare il dominio (o le condizioni di esistenza) delle frazioni: $x\neq \pm 2a$. Il $mcm=(x-2a)\,(x+2a)$

$$(x+2a)^2-(x-2a)^2=4x\,(2a-1)+3$$

$$\cancel{x^2}+4ax+\cancel{4a^2}\cancel{-x^2}+4ax\cancel{-4a^2}=8ax-4x+3$$

$$4x+\cancel{4ax+4ax-8ax}=3$$

$$4x=3$$

In questo caso la soluzione generale è

$$x=\frac{3}{4}$$

ora, se $x=\frac{3}{4}$, allora dalle condizioni di esistenza si ha che $a\neq\pm\frac{3}{8}$; pertanto

Se $a=\pm\frac{3}{8}$ allora l'equazione diventa impossibile.

Se $a\neq\pm\frac{3}{8}$, allora $x=\dfrac{3}{4}$.

Esercizio 75. Risolvere la seguente equazione letterale frazionaria

$$\frac{a}{x-a}-\frac{b}{x-b}=\frac{a^2+b^2}{x\left(x-a-b\right)+ab}$$

Soluzione. Riscriviamo il denominatore del secondo membro

$$\frac{a}{x-a}-\frac{b}{x-b}=\frac{a^2+b^2}{x^2-\left(a+b\right)x+ab}$$

ma $x^2-\left(a+b\right)x+ab=\left(x-a\right)\left(x-b\right)$, per cui $x\neq a$ e $x\neq b$. Il $mcm=\left(x-a\right)\left(x-b\right)$

$$a\left(x-b\right)-b\left(x-a\right)=a^2+b^2$$

$$ax\cancel{-ab}-bx\cancel{+ab}=a^2+b^2$$

$$x\left(a-b\right)=a^2+b^2$$

anche qui dobbiamo porre $a\neq b$

$$x=\frac{a^2+b^2}{a-b}$$

ora, se $a=b$, allora l'equazione risulta impossibile

Esercizio 76. Risolvere la seguente equazione letterale frazionaria

$$\frac{1}{x+1}+\frac{a}{a-1}=0$$

Soluzione. Iniziamo a determinare il dominio dell'equazione $x\neq-1$; va introdotta anche una condizione sul parametro onde garantire che la seconda frazione abbia significato, cioè $a\neq1$. Il $mcm=\left(x+1\right)\left(a-1\right)$

$$a-1+a\left(x+1\right)=0$$

$$ax=1-2a$$

per cui, come già detto se $a=1$, l'equazione perde di significato;

se $a=0$, allora l'equazione diventa $0=1$ ed è impossibile

Se $a\neq0\wedge a\neq1$ allora

$$x=\frac{1-2a}{a}$$

Esercizio 77. Risolvere la seguente equazione letterale frazionaria

$$\frac{3a-2}{x}+\frac{1-a}{1-x}=\frac{a}{x^2-x}$$

Soluzione. Iniziamo a determinare il dominio dell'equazione $x \neq -1$, $x \neq 0$. Poiché $1-x = -(x-1)$, possiamo riscrivere come

$$\frac{3a-2}{x} - \frac{1-a}{x-1} = \frac{a}{x(x-1)}$$

Il $mcm = x(x-1)$

$$(3a-2)(x-1) - x(1-a) = a$$

$$3ax - 3a - 2x + 2 - x + ax = a$$

$$4ax - 3x = 4a - 2$$

$$x(4a-3) = 4a-2$$

per cui, se $a = \frac{3}{4}$, allora l'equazione diventa $0 = \frac{1}{2}$ ed è impossibile

se $a = \frac{1}{2}$, allora $x = 0$ e l'equazione è impossibile perché $x = 0$ non appartiene al dominio

Se $a \neq \frac{3}{4} \wedge a \neq \frac{1}{2}$ allora

$$x = \frac{2(a-1)}{4a-3}$$

Esercizio 78. Risolvere la seguente equazione letterale frazionaria

$$\frac{a-1}{2x+3} - \frac{a}{2-x} = \frac{3a^2+3a+1}{2x^2-x-6}$$

Soluzione. Scomponiamo prima il polinomio di 2° grado e ricordiamo che $2-x = -(x-2)$

$$\frac{a-1}{2x+3} + \frac{a}{x-2} = \frac{3a^2+3a+1}{(x-2)(2x+3)}$$

Iniziamo a determinare il dominio dell'equazione $x \neq -\frac{3}{2}$, $x \neq 2$. Il $mcm = (x-2)(2x+3)$

$$(a-1)(x-2) + a(2x+3) = 3a^2 + 3a + 1$$

$$ax - 2a - x + 2 + 2ax + \cancel{3a} = 3a^2 + \cancel{3a} + 1$$

$$3ax - x = 3a^2 + 2a - 1$$

$$x(3a-1) = (a+1)(3a-1)$$

per cui, se $a = \frac{1}{3}$, allora l'equazione diventa $0 = 0$ ed è indeterminata

se $a = 1 \vee a = -\frac{5}{2}$, allora l'equazione è impossibile perché si otterrebbero proprio i valori di x non appartenenti al dominio

Se $a \neq \frac{1}{3} \wedge a \neq -\frac{5}{2} \wedge a = 1$ allora

$$x = a+1$$

Esercizio 79. Risolvere la seguente equazione letterale frazionaria

$$\frac{1}{x-2a+1} + \frac{1}{x+2a-1} = 1$$

Soluzione. Riscriviamo

$$\frac{1}{x-(2a-1)}+\frac{x}{x+(2a-1)}=1$$

Iniziamo a determinare il dominio dell'equazione $x \neq \pm(2a-1)$. Il $mcm = (x-2a+1)(x+2a-1)$

$$x+2a-1+\cancel{x^2}-2ax+x=\cancel{x^2}-(2a-1)^2$$

$$2x-2ax=-4a^2+4a-1-2a+1$$

$$2x(a-1)=4a^2-2a$$

$$x(a-1)=a(2a-1)$$

per cui, poiché se $a=1$, allora l'equazione diventa $0x=1$, per cui l'equazione risulta impossibile

se $a=\frac{1}{2}$, allora l'equazione diventa $-\frac{1}{2}x=0$ ed è ancora impossibile

Se $a\neq\frac{1}{2}\wedge a\neq 1$ allora

$$x=\frac{a(2a-1)}{a-1}$$

Esercizio 80. Risolvere la seguente equazione letterale frazionaria

$$\left(\frac{x-2}{a-1}-\frac{x}{a}\right):\left(\frac{x+2}{a+2}-\frac{x}{a}\right)=\frac{a+2}{a^2-ax-a+x}$$

Soluzione. Riscriviamo

$$\left(\frac{x-2}{a-1}-\frac{x}{a}\right):\left(\frac{x+2}{a+2}-\frac{x}{a}\right)=\frac{a+2}{a(a-x)-(a-x)}$$

$$\left(\frac{x-2}{a-1}-\frac{x}{a}\right):\left(\frac{x+2}{a+2}-\frac{x}{a}\right)=\frac{a+2}{(a-x)(a-1)}$$

Iniziamo a determinare il dominio dell'equazione $x\neq a$. Ma le frazioni perdono di significato se $a=1$ e $a=-2$ e $a=0$. Sommiamo dentro le parentesi

$$\left(\frac{ax-2a-ax+x}{a-1}\right):\left(\frac{ax+2a-ax-2x}{a+2}\right)=\frac{a+2}{(a-x)(a-1)}$$

$$\frac{x-2a}{a-1}\cdot\frac{a+2}{2(a-x)}=\frac{a+2}{(a-x)(a-1)}$$

Il $mcm=2(a-x)(a-1)$ e moltiplicando tutto per il mcm

$$(x-2a)(a+2)=2a+4$$

$$x(a+2)-2a(a+2)=2a+4$$

$$x(a+2)=2a+4+2a^2+4a$$

$$x(a+2)=2\left(a^2+3a+2\right)$$

$$x(a+2)=2(a+2)(a+1)$$

per cui, dovendo essere $x\neq a$, se $a=-2$, allora l'equazione diventa $0x=0$, cioè indeterminata

se $a=-1$, allora l'equazione diventa $-1=0$ ed è ancora impossibile

Se $a\neq -2\wedge a\neq -1$ allora

$$x=2(a+1)$$

Esercizio 81. Risolvere, considerando come incognita la lettera a, la seguente equazione

$$\frac{b-2a}{2b}-\frac{b-a}{b}=\frac{a+3b}{6b}$$

Soluzione. L'equazione è del tipo a coefficienti letterali (non è frazionaria, mancando l'incognita a al denominatore). Porremo quindi la condizione $b \neq 0$, affinché le frazioni abbiano significato. Il $mcm = 6b$.

$$\cancel{3b} \cancel{-6a} - 6b \cancel{+6a} = a + \cancel{3b}$$

se quindi, come già detto, $b \neq 0$, allora

$$a = -6b$$

Esercizio 82. Dato il polinomio

$$P(x) = (2a-3)x^3 + x^2 + 50a - 102$$

stabilire per quale valore del parametro a è esatta la divisione di $P(x)$ con $(x+3)$, ricordando il teorema del resto. Trovato il valore di a, lo si sostituisca in $P(x)$ e si trovi il quoziente della divisione

Soluzione. Ricordiamo che una divisione è detta esatta se il suo resto è uguale a zero. Per il teorema del resto, allora il polinomio si annulla per $x = -3$, cioè $P(-3) = 0$.

$$P(-3) = (2a-3)\cdot(-27) + 9 + 50a - 102 = 0$$

risolvendo rispetto ad a

$$-54a + 81 + 9 + 50a - 102 = 0$$

$$-4a = 12$$

da cui

$$a = -3$$

Il polinomio diviene

$$P(x) = -9x^3 + x^2 - 252$$

Applicando la regola di Ruffini si ha

$$\left(-9x^3 + x^2 - 252\right) : (x+3) = -9x^2 + 28x - 84$$

Sistemi di primo grado

Tre metodi risolutivi:

- Metodo di sostituzione: ricavare un'incognita da una equazione e sostituire nell'altra, ottenendo così un'equazione con una sola incognita
- Metodo del confronto: ricavare la stessa incognita da entrambe le equazioni e, applicando la proprietà transitiva, confrontare i due secondi membri
- Metodo di riduzione o di combinazione lineare: sostituire un'equazione con una combinazione lineare delle due
- Metodo di Cramer (non presente qui perché richiederebbe la conoscenza delle matrici e dei loro determinanti)

Esercizio 83. Risolvere graficamente e/o algebricamente il seguente sistema di equazioni di primo grado a due incognite.

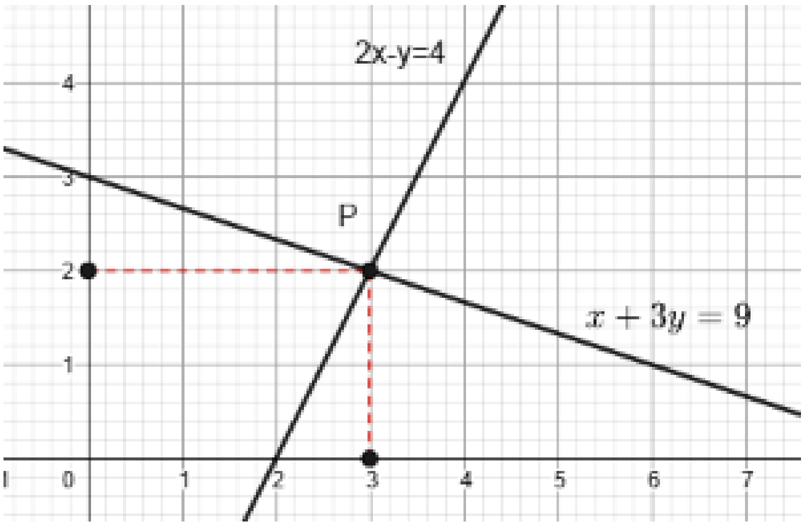
$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$$

Soluzione. Applichiamo il metodo della sostituzione, ricavando l'incognita x dalla seconda equazione (avendo coefficiente numerico $= 1$)

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x = 9 - 3y \end{cases} \quad \begin{cases} 2(9 - 3y) - y = 4 \\ x = 9 - 3x \end{cases} \quad \begin{cases} 18 - 6y - y = 4 \\ x = 9 - 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7y = -14 \\ x = 9 - 3y \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

La risoluzione grafica richiede ovviamente di riconoscere che le equazioni di primo grado in due incognite rappresentano delle rette, per cui la soluzione del sistema consiste nell'individuare la presenza di un punto di intersezione tra le due rette.



Esercizio 84. Risolvere il seguente sistema di equazioni di primo grado a due incognite.

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$$

Soluzione. Applichiamo il metodo del confronto (anche se non è il più conveniente), ricavando l'incognita y da entrambe le equazioni

$$\begin{cases} y = \dfrac{1 - 3x}{5} \\ y = 7 - 4x \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{1 - 3x}{5} = 7 - 4x \\ y = 7 - 4x \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - 3x = 35 - 20x \\ y = 7 - 4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 17x = 34 \\ y = 7 - 4x \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Esercizio 85. Risolvere il seguente sistema di equazioni di primo grado a due incognite.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 6 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

Soluzione. Applichiamo il metodo di riduzione, sostituendo ad una equazione la somme delle due equazioni, dopo aver moltiplicando la seconda equazione per -1 (secondo criterio di equivalenza delle equazioni)

$$-1\cdot\quad \begin{cases} 3x-4y=6 \\ -3x+y=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-4y=6 \\ -3y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-4=6 \\ y=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=-1 \end{cases}$$

Esercizio 86. Risolvere il seguente sistema di equazioni di primo grado a due incognite.

$$\begin{cases} 3y-2x=0 \\ \frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y=\frac{1}{6} \end{cases}$$

Soluzione. Trasformiamo la seconda con coefficienti interi ($mcm=6$)

$$\begin{cases} -2x+3y=0 \\ 4x-3y=1 \end{cases}$$

applichiamo il metodo di riduzione, moltiplicando la prima equazione per 2 (secondo criterio di equivalenza delle equazioni)

$$2\quad \begin{cases} -4x+6y=0 \\ 4x-3y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y=1 \\ 4x-3y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x=2 \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Esercizio 87. Risolvere il seguente sistema di equazioni di primo grado a due incognite.

$$\begin{cases} (x+1)^2-(y+2)^2=(x+y)(x-y)+2(x-2y+1) \\ x+y+3=0 \end{cases}$$

Soluzione. Svolgiamo i prodotti notevoli nella prima equazione

$$\begin{cases} \cancel{x^2}\cancel{+2x}+1\cancel{-y^2}\cancel{-4y}-4=\cancel{x^2}\cancel{-y^2}\cancel{+2x-4y}+2 \\ x+y=-3 \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{cases} 0=5 \\ x+y=-3 \end{cases}$$

il sistema risulta impossibile in quanto la prima equazione non ha soluzioni e quindi non ci possono essere nemmeno soluzioni comuni tra le due equazioni.

Esercizio 88. Risolvere il seguente sistema di equazioni di primo grado a due incognite.

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\left(\frac{x-2}{4}-\frac{y+1}{2}\right)=-\left(\frac{3x-2}{3}-\frac{y-3}{2}\right)+3 \\ 2^{-1}\left[4x-(2y-x)\right]=\frac{1-y}{10}-\left(5^{-1}x-\frac{23}{4}\right) \end{cases}$$

Soluzione. Svolgiamo i calcoli proposti (non si può ancora certamente individuare il metodo risolutivo più opportuno)

$$\begin{cases} \dfrac{x-2-2y-2}{12} = -\dfrac{6x-4-3y+9}{6}+3 \\ \dfrac{4x-2y+x}{2} = \dfrac{1-y}{10} - \dfrac{4x-115}{20} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-2y-4}{12} = \dfrac{-6x+3y+13}{6} \\ 50x-20y = 2-2y-4x+115 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y-4 = -12x+6y+26 \\ 54x-18y = 117 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13x-8y = 30 \\ 6x-2y = 13 \qquad \times(-4) \end{cases} \qquad \begin{cases} 13x-8y = 30 \\ -24x+8y = -52 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x-2y = 13 \\ -11x = -22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Esercizio 89. Risolvere il seguente sistema di equazioni di primo grado a due incognite.

$$\begin{cases} \frac{2}{9}\left[x\left(2-\frac{1}{2}\right)^2 - y\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\right] = x+y+1 \\ \left[1-\left(+\frac{1}{2}\right)^2\right]\frac{x+1}{3} + \left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]\frac{y-1}{5} + \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Svolgiamo i calcoli proposti (non si può ancora certamente individuare il metodo risolutivo più opportuno)

$$\begin{cases} \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{9x}{4} - \dfrac{9y}{4}\right) = x+y+1 \\ \dfrac{3}{4}\dfrac{x+1}{3} + \dfrac{5}{4}\dfrac{y-1}{5} + \dfrac{1}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{9x-9y}{18} = x+y+1 \\ \dfrac{x+1}{4} + \dfrac{y-1}{4} + \dfrac{1}{4} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9x-9y = 18x+18y+18 \\ x+1+y-1+1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9x-27y = 18 \\ x+y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -9(-y-1)-27y = 18 \\ x = -y-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9y+9-27y = 18 \\ x = -y-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -18y = 9 \\ x = -y-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Esercizio 90. Risolvere il seguente sistema di equazioni di primo grado a due incognite.

$$\begin{cases} \dfrac{4}{3} - \dfrac{5}{y} = \dfrac{2-x}{y} \\ 2(x-1) = \dfrac{5y}{3} + 12 \end{cases}$$

Soluzione. La prima equazione è frazionaria e richiede l'individuazione del suo dominio, cioè dell'insieme dei numeri reali che possono rappresentare la possibili soluzioni. In questo caso $D: \forall y \in \mathbb{R} - \{0\}$. $mcm = 3y$

$$\begin{cases} 4y-15 = 6-3x \\ 6x-6 = 5y+36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+4y=21 \\ 6x-5y=42 \end{cases} \qquad \begin{cases} -6x-8y=-42 \\ 6x-5y=42 \end{cases}$$

sommiamo le due equazioni dopo aver moltiplicato la prima per -2

$$\begin{cases} 3x+4y=21 \\ -13y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=7 \\ y=0\ (?) \end{cases}$$

L'equazione non ammette pertanto soluzioni perché $y=0$ non appartiene al dominio della prima equazione.

Esercizio 91. Determinare i valori dei parametri $h,k\in\mathbb{Q}$ tali che i polinomi

$$\begin{array}{l} f(x)=hx^2+2x+(x-1)^3 \\ g(x)=x^3+(2k-5)x^2+(k-2h)x-1 \end{array}$$

risultino identici.

Soluzione. Riscriviamo la $f(x)$

$$f(x)=hx^2+2x+x^3-3x^2+3x-1$$

$$\begin{array}{l} f(x)=x^3+(h-3)x^2+5x-1 \\ g(x)=x^3+(2k-5)x^2+(k-2h)x-1 \end{array}$$

Affinché siano identici

$$\begin{cases} h-3=2k-5 \\ k-2h=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} h-2k=-2 \\ -2h+k=5 \end{cases}$$

risolviamo con il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} h=2k-2 \\ -2(2k-2)+k=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} h=2k-2 \\ -3k=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} h=-\frac{2}{3}-2=-\frac{8}{3} \\ k=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

Esercizio 92. Determinare il valore di a per il quale il sistema è impossibile

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ (a-1)x+(2a+1)y=4 \end{cases}$$

Soluzione. Risolviamo

$$\begin{cases} x=\frac{1+3y}{2} \\ (a-1)\left(\frac{1+3y}{2}\right)+(2a+1)y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{1+3y}{2} \\ (a-1)(1+3y)+2y(2a+1)=8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{1+3y}{2} \\ y(3a-3)+y(4a+2)=8+1-a \end{cases}$$

per cui

$$\begin{cases} x=\frac{1+3y}{2} \\ y(7a-1)=9-a \end{cases}$$

il sistema risulta pertanto impossibile se $a=\frac{1}{7}$, perché avremmo $0=\frac{62}{7}$.

Esercizio 93. Determinare il valore di k per il quale il sistema è indeterminato

$$\begin{cases} 3x-2y=5 \\ (k-1)\,x-2ky=k-2 \end{cases}$$

Soluzione. Risolviamo

$$\begin{cases} y=\dfrac{3x-5}{2} \\ (k-1)\,x-\cancel{2}k\left(\dfrac{3x-5}{\cancel{2}}\right)=k-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{3x-5}{2} \\ kx-x-3kx+5k=k-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\frac{3x-5}{2} \\ 2kx+x=4k+2 \end{cases}$$

per cui

$$\begin{cases} y=\frac{3x-5}{2} \\ x\,(2k+1)=2\,(2k+1) \end{cases}$$

il sistema risulta pertanto indeterminato se $a=-\dfrac{1}{2}$, perché avremmo $0=0$.

Esercizio 94. Risolvere e discutere il sistema di equazioni letterali a due incognite

$$\begin{cases} 2x-y=a \\ x+3y=4a \end{cases}$$

Soluzione. Risolviamo con il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} y=2x-a \\ x+3\,(2x-a)=4a \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2x-a \\ 7x=7a \end{cases} \qquad \begin{cases} x=a \\ y=a \end{cases}$$

Esercizio 95. Risolvere e discutere il sistema di equazioni letterali a due incognite

$$\begin{cases} ax+y\,(a+1)=2 \\ \left(a^2+a\right)(x-y)=1 \end{cases}$$

Soluzione. Svolgiamo le operazioni per giungere alla scrittura del sistema in forma normale

$$\begin{cases} ax+y\,(a+1)=2 \\ \left(a^2+a\right)x-a\,(a+1)\,y=1 \end{cases}$$

risolvo con il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} y=\frac{2-ax}{a+1} \\ \left(a^2+a\right)x-a\,(a+1)\,y=1 \end{cases}$$

pertanto

Se $a=-1$, l'equazione in y risulta impossibile

se $a\neq-1$, allora

$$\begin{cases} y=\frac{2-ax}{a+1} \\ a\,(a+1)\,x-\frac{a\cancel{(a+1)}(2-ax)}{\cancel{a+1}}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2-ax}{a+1} \\ \left(a^2+a\right)x - a\left(2-ax\right) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{2-ax}{a+1} \\ a^2x + ax - 2a + a^2x = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{2-ax}{a+1} \\ ax\left(2a+1\right) = 2a+1 \end{cases}$$

Se $a = -\frac{1}{2}$, l'equazione in x risulta indeterminata, perché si avrebbe $0 = 0$
Se $a = 0$, l'equazione in x risulta impossibile, perché si avrebbe $0 = 1$
Se $a \neq 0 \wedge a \neq -\frac{1}{2} \wedge a \neq -1$, allora

$$\begin{cases} y = \frac{2-ax}{a+1} \\ x = \dfrac{1}{a} \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{1}{a+1} \\ x = \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

Esercizio 96. Risolvere e discutere il sistema di equazioni letterali a due incognite

$$\begin{cases} x + y = b \\ ax + by = a^2 \end{cases}$$

Soluzione. Risolviamo con il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} x = b - y \\ a\left(b-y\right) + by = a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = b - y \\ y\left(b-a\right) = ab - a^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = b - y \\ y = \dfrac{a\left(a-b\right)}{b-a} \end{cases}$$

Se $a = b$, allora il valore dell'incognita y è indeterminato, risultando $0 = 0$ e quindi anche il sistema è indeterminato.

Se $a \neq b$, allora

$$\begin{cases} x = a + b \\ y = -a \end{cases}$$

Esercizio 97. Risolvere e discutere il sistema di equazioni letterali a due incognite

$$\begin{cases} \left(b-a\right)x + \left(a+b\right)y = 4ab \\ \dfrac{x+y}{a-b} + \dfrac{y-x}{a+b} = 2 + \dfrac{4ab}{a^2-b^2} \end{cases}$$

Soluzione. Nella seconda equazione il $mcm = \left(a-b\right)\left(a+b\right)$ e, per moltiplicare per il mcm è necessario porre le condizioni che garantiscono l'esistenza delle frazioni, cioè $a \neq \pm b$

$$\begin{cases} \left(b-a\right)x + \left(a+b\right)y = 4ab \\ \left(a+b\right)\left(x+y\right) + \left(a-b\right)\left(y-x\right) = 2a^2 - 2b^2 + 4ab \end{cases}$$

svolgiamo applicando la proprietà distributiva

$$\begin{cases} -\left(a-b\right)x + \left(a+b\right)y = 4ab \\ \left(a+b\right)x + \left(a+b\right)y + \left(a-b\right)y - \left(a-b\right)x = 2a^2 - 2b^2 + 4ab \end{cases}$$

osserviamo che nel primo termine della seconda equazione è contenuto il primo membro della prima equazione, cioè le due equazioni hanno in comune $-\left(a-b\right)x + \left(a+b\right)y$; pertanto al posto di questa somma sostituiamo $4ab$

$$\begin{cases} -\left(a-b\right)x + \left(a+b\right)y = 4ab \\ \left(a+b\right)x + \left(a-b\right)y = 2\left(a^2-b^2\right) \end{cases}$$

risolviamo con il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} y = \frac{4ab+(a-b)x}{a+b} \\ (a+b)\,x + \frac{(a-b)[4ab+(a-b)x]}{a+b} = 2\left(a^2-b^2\right) \end{cases}$$

dobbiamo svolgere il calcolo sfruttando al massimo le possibilità di raccoglimento a fattor comune e i prodotti notevoli

$$\begin{cases} y = \frac{4ab+(a-b)x}{a+b} \\ (a+b)^2\,x + 4a^2b - 4ab^2 + (a-b)^2\,x = 2\,(a-b)\,(a+b)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{4ab+(a-b)x}{a+b} \\ x\left(a^2+b^2+2ab+a^2+b^2-2ab\right) = 2\,(a-b)\,(a+b)^2 - 4a^2 + 4ab^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{4ab+(a-b)x}{a+b} \\ 2x\left(a^2+b^2\right) = 2\,(a-b)\,(a+b)^2 - 4ab\,(a-b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{4ab+(a-b)x}{a+b} \\ 2x\left(a^2+b^2\right) = (a-b)\left(2a^2+2b^2+4ab-4ab\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{4ab+(a-b)x}{a+b} \\ x\left(a^2+b^2\right) = (a-b)\left(a^2+b^2\right) \end{cases}$$

La somma a^2+b^2 è la somma di due quadrati e quindi sempre positiva per tutti i valori di a e b escluso lo zero; pertanto

se $(a = \pm b)$, la seconda equazione perde di significato

se $a \neq \pm b$, allora

$$\begin{cases} x = a-b \\ y = \frac{4ab+(a-b)^2}{a+b} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a-b \\ y = \dfrac{(a+b)^2}{a+b} = a+b \end{cases}$$

Esercizio 98. Risolvere e discutere il sistema di equazioni letterali a due incognite

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{a+2} = (a-2) + \dfrac{y}{2} \\ \dfrac{x-y}{\left[(a+2)^2 - 2a\right]} = a + \dfrac{y}{4} \end{cases}$$

Soluzione. Riscriviamo il denominatore della seconda equazione

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{a+2} = (a-2) + \dfrac{y}{2} \\ \dfrac{x-y}{a^2+2a+4} = a + \dfrac{y}{4} \end{cases}$$

L'esistenza della frazione nella prima equazione richiede $a \neq -2$. Nella seconda equazione il denominatore è sempre positivo, per cui

$$\begin{cases} 2x+2y = 2a\left(a^2-4\right) + y\,(a+2) \\ 4x+4y = 4a\,(a+2a+4) - y\left(a^2+2a+4\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y\,(2-a-2) = 2a\left(a^2-4\right) \\ 4x + y\left(a^2+2a+4-4\right) = 4a\left(a^2+2a+4\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - ay = 2a\left(a^2-4\right) \\ 4x + a\,(a+2)\,y = 4a\left(a^2+2a+4\right) \end{cases}$$

risolviamo con il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} 2x = 2a\left(a^2-4\right)+ay \\ 4a\left(a^2-4\right)+a\left(a+4\right)y = 4a\left(a^2+2a+4\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 2a\left(a^2-4\right)+ay \\ a\left(a+4\right)y = 4a\left(a^2+2a+4-a^2+4\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 2a\left(a^2-4\right)+ay \\ a\left(a+4\right)y = 8a\left(a+4\right) \end{cases}$$

Se $a=0$, allora l'equazione è indeterminata, $0=0$
Se $a=-4$, allora l'equazione è indeterminata, $0=0$
Se $a \neq 0 \wedge a \neq -4$, allora

$$\begin{cases} 2x = 2a^3-8a+8a \\ y = 8 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x = a^3 \\ y = 8 \end{cases}$$

Esercizio 99. Risolvere e discutere il sistema di equazioni letterali a due incognite

$$\begin{cases} 2x-y = a+3 \\ ax+y+2 = (a+1)^2 \end{cases}$$

Soluzione. riscriviamo in forma normale

$$\begin{cases} 2x-y = a+3 \\ ax+y = a^2+2a-1 \end{cases}$$

risolviamo con il metodo di riduzione, sostituendo alla seconda equazione la somma delle due

$$\begin{cases} 2x-y = a+3 \\ (a+2)x = a+3+a^2+2a-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-y = a+3 \\ (a+2)x = a^2+3a+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-y = a+3 \\ (a+2)x = (a+2)(a+1) \end{cases}$$

Se $a=-2$, allora l'equazione è indeterminata, $0=0$
Se $a \neq -2$, allora

$$\begin{cases} x = a+1 \\ y = 2a+2-a-3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a+1 \\ y = a-1 \end{cases}$$

Esercizio 100. Risolvere e discutere il sistema di equazioni letterali a due incognite

$$\begin{cases} 3x-2y = a-8 \\ \dfrac{x}{a-2}+\dfrac{y}{a+1} = 2 \end{cases}$$

Soluzione. L'esistenza delle frazioni nella seconda equazione richiede $a \neq 2$, $a \neq -1$. Il $mcm = (a-2)(a+1)$, per cui

$$\begin{cases} 3x - 2y = a - 8 \\ (a+1)x + (a-2)y = 2(a-2)(a+1) \end{cases}$$

risolviamo con il metodo si sostituzione

$$\begin{cases} y = \dfrac{3x - a + 8}{2} \\ (a+1)x + (a-2)\left(\dfrac{3x - a + 8}{2}\right) = 2(a-2)(a+1) \end{cases}$$

cerchiamo sempre di svolgere utilizzando la proprietà distributiva che consente una migliore gestione del calcolo

$$\begin{cases} y = \dfrac{3x - a + 8}{2} \\ 2(a+1)x + 3(a-2)x + (a-2)(8-a) = 4(a-2)(a+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{3x - a + 8}{2} \\ (5a-4)x = (a-2)(5a-4) \end{cases}$$

Se $a = \frac{4}{5}$, allora l'equazione è indeterminata, $0 = 0$
Se $a = 2$, allora l'equazione perde di significato
Se $a \neq 2 \wedge a \neq \frac{4}{5}$, allora

$$\begin{cases} x = a - 2 \\ y = \dfrac{3a - 6 - a + 8}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a - 2 \\ y = a + 1 \end{cases}$$

Sistemi a tre incognite con coefficienti numerici

Esercizio 101. Risolvere e discutere il sistema di equazioni a tre incognite

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 6 \\ x - y + 2z = -5 \end{cases}$$

Soluzione. risolviamo con il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} x = 1 - y - z \\ 2 - 2y - 2z + y - z = 6 \\ 1 - y - z - y + 2z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - y - z \\ -y - 3z = 4 \\ -2y + z = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - y - 2y + 6 \\ -y - 6y + 18 = 4 \\ z = 2y - 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3y + 7 \\ -7y = -14 \\ z = 2y - 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -3y + 7 \\ y = 2 \\ z = 2y - 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{cases}$$

Esercizio 102. Risolvere e discutere il sistema di equazioni a tre incognite

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ -2x+y-2z=-1 \\ y+z=4 \end{cases}$$

Soluzione. risolviamo con il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} x+2y+4-y=3 \\ -2x+y-8+2y=-1 \\ z=4-y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ -2x+3y=7 \\ z=4-y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-1-y \\ 2+2y+3y=7 \\ z=4-y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$$

Esercizio 103. Risolvere e discutere il sistema di equazioni a tre incognite

$$\begin{cases} \frac{2y+x-z}{3}+\frac{1}{5}x=\frac{4}{5} \\ 2y-\frac{x+z}{2}=3 \\ 2\left(x-y\right)-\frac{1}{3}z=-2 \end{cases}$$

Soluzione. Riscriviamo con coefficienti interi

$$\begin{cases} 8x+10y-5z=12 \\ -x+4y-z=6 \\ 6x-6y-z=-6 \end{cases}$$

risolviamo con il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} 32y-8z-48+10y-5z=12 \\ x=4y-z-6 \\ 24y-6z-36-6y-z=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 42y-13z=60 \\ x=4y-z-6 \\ 18y-7z=30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4y-z-6 \\ y=\frac{60+13z}{42} \\ \frac{18(60+13z)}{42}-7z=30 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=4y-z-6 \\ y=\frac{60+13z}{42} \\ \frac{3(60+13z)}{7}-7z=30 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=4y-z-6 \\ y=\frac{60+13z}{42} \\ 180+39z-49z=210 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4y-z-6 \\ y=\frac{60+13z}{42} \\ -10z=30 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=-3 \end{cases}$$

Esercizio 104. Risolvere e discutere il sistema di equazioni a tre incognite

$$\begin{cases} \dfrac{2x-3z}{1-y}=1 \\ \dfrac{x-3z}{y+1}=2 \\ y=3(x-2z-1) \end{cases}$$

Soluzione. Qui abbiamo un sistema con due equazioni frazionarie rispetto all'incognita y, per cui il dominio sarà $D: \forall y \in \mathbb{R}-\{\pm 1\}$. Riscriviamo con coefficienti interi

$$\begin{cases} 2x-3z=1-y \\ x-3z=2y+2 \\ y=y=3(x-2z-1) \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y-3z=1 \\ x-2y-3z=2 \\ y=3(x-2z-1) \end{cases}$$

risolviamo con il metodo di sostituzione, già impostato

$$\begin{cases} 2x+3x-6z-3-3z=1 \\ x-6x+12z+6-3z=2 \\ y=3(x-2z-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x-9z=4 \\ -5x+9z=-4 \\ y=3(x-2z-1) \end{cases}$$

applichiamo il metodo della combinazione lineare sommando le prime due equazioni

$$\begin{cases} 5x-9z=4 \\ 0z=0 \\ y=3(x-2z-1) \end{cases}$$

il sistema risulta pertanto indeterminato.

Esercizio 105. Risolvere e discutere il sistema di equazioni a tre incognite

$$\begin{cases} x(z+2)=(x+1)(z+1) \\ (y+4)(x+3)=(x+1)(y+5) \\ (z+2)(y+3)=(z-1)(y+6) \end{cases}$$

Soluzione. Qui abbiamo un sistema, che inizialmente presenta termini di secondo grado a causa del prodotto tra le incognite

$$\begin{cases} \cancel{xz}+2x=\cancel{xz}+x+z+1 \\ \cancel{xy}+3y+4x+12=\cancel{xy}+5x+y+5 \\ \cancel{yz}+3z+2y+6=\cancel{yz}+6z-y-6 \end{cases}$$

il sistema si riduce a primo grado

$$\begin{cases} x-z=1 \\ -x+2y=-7 \\ 3y-3z=-12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-z=1 \\ x-2y=7 \\ y-z=-4 \end{cases}$$

applichiamo il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} x=1+z \\ 1+z-2y=7 \\ y-z=-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1+z \\ -2y+z=6 \\ y-z=-4 \end{cases}$$

applichiamo ancora il metodo della combinazione lineare sommando la terza alla seconda

$$\begin{cases} x=1+z \\ y=-2 \\ y-z=-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \\ z=2 \end{cases}$$

Esercizio 106. Risolvere e discutere il sistema di equazioni

$$\begin{cases} ax+by=2z \\ \frac{x-y}{a-b}+\frac{z}{ab}=0 \\ a(z+x)=a+1 \end{cases}$$

Soluzione. Qui abbiamo un sistema con coefficienti letterali anche frazionari; porremo quindi le condizioni per l'esistenza delle frazioni: $a\neq b$, $a,b\neq 0$

$$\begin{cases} ax+by=2z \\ abx-aby+(a-b)z=0 \\ a(z+x)=a+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax+by-2z=0 \\ abx-aby+(a-b)z=0 \\ ax+az=a+1 \end{cases}$$

applichiamo il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} ax=2z-by \\ 2bz-b^2y-aby+(a-b)z=0 \\ 2z-by+az=a+1 \end{cases} \quad \begin{cases} ax=2z-by \\ -by(a+b)+(a+b)z=0 \\ -by+(a+2)z=a+1 \end{cases}$$

se $a=-b$, allora il sistema è indeterminato e per poter semplificare deve valere $a\neq -b$

$$\begin{cases} ax=2z-by \\ z=by \\ -by+(a+2)by=a+1 \end{cases} \quad \begin{cases} ax=by \\ z=by \\ (a+1)by=a+1 \end{cases}$$

se $a=-1$, allora il sistema è indeterminato; se $a\neq -1$ e $a\neq -b$ si ha

$$\begin{cases} x=\frac{1}{a} \\ y=\frac{1}{b} \\ z=1 \end{cases}$$

Esercizio 107. Risolvere e discutere il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{x-z}{a+1}=y-1 \\ \frac{x-1}{a-1}=y+1 \\ x-2y+z=(a-1)^2 \end{cases}$$

Soluzione. Qui abbiamo un sistema con coefficienti letterali anche frazionari; porremo quindi le condizioni per l'esistenza delle frazioni: $a\neq \pm 1$

$$\begin{cases} x-z=(a+1)y-a-1 \\ x\cancel{-1}=(a-1)y+a\cancel{-1} \\ x-2y+z=(a-1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-(a+1)y-z=-a-1 \\ x=(a-1)y+a \\ x-2y+z=(a-1)^2 \end{cases}$$

applichiamo il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} (a-1)y+a-(a+1)y-z=-a-1 \\ x=(a-1)y+a \\ (a-1)y+a-2y+z=(a-1)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} -2y-z=-2a-1 \\ x=(a-1)y+a \\ (a-3)y+z=(a-1)^2-a \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -2y + 2a + 1 \\ x = (a-1)y + a \\ (a-3)y - 2y + 2a + 1 = (a-1)^2 - a \end{cases} \qquad \begin{cases} z = -2y + 2a + 1 \\ x = (a-1)y + a \\ (a-5)y = a(a-5) \end{cases}$$

se $a = 5$, allora il sistema è indeterminato; se $a \neq 5$ si ha

$$\begin{cases} x = a^2 \\ y = a \\ z = 1 \end{cases}$$

Sistemi con artifici

Esercizio 108. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 8 \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 3 \end{cases}$$

Soluzione. Le due equazioni sono frazionarie, per cui si deve porre $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Nelle due equazioni le incognite compaiono al denominatore nello stesso modo; è possibile quindi introdurre un cambiamento di variabile per semplificare la scrittura ed evitare di avere termini di secondo grado. Pertanto, nel dominio indicato per le due incognite,

$$\frac{1}{x} = u \quad \frac{1}{y} = v$$

Il sistema diventa

$$\begin{cases} u + 2v = 8 \\ 3u - v = 3 \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} u = 8 - 2v \\ 24 - 6v - v = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} u = 8 - 2v \\ -7v = -21 \end{cases} \quad \begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases}$$

Troviamo ora le soluzioni per x e y, che saranno le reciproche di quelle trovate; quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Esercizio 109. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x} - \frac{y+1}{y} + \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Soluzione. Riscriviamo, ricordando la somma delle frazioni

$$\begin{cases} \cancel{1} + \frac{1}{x} \cancel{-1} - \frac{1}{y} + \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Le due equazioni sono frazionarie, per cui si deve porre $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Introduciamo la sostituzione

$$\frac{1}{x} = u \quad \frac{1}{y} = v$$

Il sistema diventa

$$\begin{cases} u - v = -\frac{1}{2} \\ u + v = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di combinazione lineare, sommando le due equazioni

$$\begin{cases} u - v = -\frac{1}{2} \\ 2u = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ v = 1 \end{cases}$$

Troviamo ora le soluzioni per x e y, che saranno le reciproche di quelle trovate; quindi

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Esercizio 110. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y-1} + \dfrac{y}{x+1} = 2 \\ \dfrac{x}{y-1} = \dfrac{2y}{x+1} - 1 \end{cases}$$

Soluzione. Il dominio delle due incognite deve tenere conto che $x \neq -1$ e $y \neq 1$. Introduciamo la sostituzione

$$\frac{x}{y-1} = u \quad \frac{y}{x+1} = v$$

Il sistema diventa

$$\begin{cases} u + v = 2 \\ u - 2v = -1 \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} u = 2 - v \\ 2 - 3v = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases}$$

Troviamo ora le soluzioni per x e y nei domini già indicati

$$\begin{cases} \frac{x}{y-1} = 1 \\ \frac{y}{x+1} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y - 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = -1 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

il sistema risulta pertanto indeterminato, essendo le due equazioni identiche.

Esercizio 111. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y-2} + \dfrac{x}{y+2} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{x}{y-2} - \dfrac{x+y+2}{y+2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Soluzione. Il dominio dell'incognita y deve tenere conto che $y \neq \pm 2$. Osserviamo prima che

$$\frac{x+y+2}{y+2} = \frac{x}{y+2} + \frac{y+2}{y+2} = \frac{x}{y+2} + 1$$

Possiamo allora riscrivere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y-2} + \dfrac{x}{y+2} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{x}{y-2} - \dfrac{x}{y+2} - 1 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Introduciamo la sostituzione

$$\frac{x}{y-2}=u \quad \frac{x}{y+2}=v$$

Il sistema diventa

$$\begin{cases} u+v=\frac{3}{2} \\ u-v=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di combinazione lineare

$$\begin{cases} 2u=2 \\ u-v=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} u=1 \\ v=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Troviamo ora le soluzioni per x e y nei domini già indicati

$$\begin{cases} \frac{x}{y-2}=1 \\ \frac{x}{y+2}=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x=y-2 \\ 2x=y+2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=y-2 \\ 2y-4-y=2 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$$

Quesito

Esercizio 112. Si consideri il polinomio $P(x)=ax^3+bx^2+cx+1$. Determinare a,b,c sapendo che il resto della divisione di $P(x)$ per $(x+1)$ è 1; il resto della divisione di $P(x)$ per $(x-2)$ è 3 e che la divisione di $P(x)$ per $(x-1)$ dà resto 0.

Soluzione. La soluzione di questo esercizio passa attraverso il teorema di Ruffini. Pertanto
se $P(x):(x+1)$ dà resto 1, allora $P(-1)=1$
se $P(x):(x-2)$ dà resto 3, allora $P(2)=3$
se $P(x):(x-1)$ dà resto 0, allora $P(1)=0$
Mettiamo a sistema le tre relazioni che devono valere contemporaneamente

$$\begin{cases} -a+b-c+1=1 \\ 8a+4b+2c+1=3 \\ a+b+c+1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a-b+c=0 \\ 4a+2b+c=1 \\ a+b+c=-1 \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} a=b-c \\ 4b-4c+2b+c=1 \\ b-c+b+c=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=b-c \\ 6b-3c=1 \\ 2b=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-\frac{1}{2}-c \\ -3-3c=1 \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} a=\frac{5}{6} \\ b=-\frac{1}{2} \\ c=-\frac{4}{3} \end{cases}$$

Problemi

Problema 113. Sommando ai $\frac{4}{11}$ della somma di due numeri i $\frac{5}{6}$ della loro differenza, si ottiene 65; sottraendo dalla differenza tra il doppio del maggiore e il triplo del minore i $\frac{2}{3}$ del minore, si ottiene 4. Trovare i due numeri.

Soluzione. Problema di interpretazione del testo. Poniamo i due numeri come incognite $n_1 = x$ e $n_2 = y$ con $x > y$. Scriviamo in linguaggio matematico le relazioni indicate a parole; otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{4}{11}(x+y) + \dfrac{5}{6}(x-y) = 65 \\ (2x-3y) - \frac{2}{5}y = 4 \end{cases}$$

Riscriviamo eliminando le frazioni

$$\begin{cases} 24x + 24y + 55x - 55y = 65 \times 66 \\ 10x - 17y = 20 \end{cases} \qquad \begin{cases} 79x - 31y = 4290 \\ 10x - 17y = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{20+17y}{10} \\ 79 \cdot \frac{20+17y}{10} - 31y = 4290 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{20+17y}{10} \\ 79 \cdot \left(2 + \frac{17y}{10}\right) - 31y = 4290 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{20+17y}{10} \\ 158 + \frac{1343y}{10} - 31y = 4290 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{20+17y}{10} \\ \frac{1033y}{10} = 4132 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 70 \\ y = 40 \end{cases}$$

Problema 114. In un negozio di articoli sportivi vi sono 31 scatole di palline da tennis. Alcune scatole contengono 3 palline e altre ne contengono 4. In totale vi sono 104 palline. Quante scatole da 3 e quante da 4 palline ci sono?

Soluzione. Indichiamo con x il numero di scatole con 3 palline e con y quello da 4. Avremo

$$\begin{cases} x + y = 31 \\ 3x + 4y = 104 \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} x = 31 - y \\ 93 - 3y + 4y = 104 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 31 - y \\ y = 11 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x = 20 \\ y = 11 \end{cases}$$

Problema 115. Determinare l'età di tre fratelli sapendo che l'età del maggiore è i $\frac{5}{7}$ della somma delle età degli altri due fratelli; 10 anni fa l'età del maggiore era i $\frac{5}{4}$ della somma delle età dei due fratelli; fra 4 anni l'età del secondo sarà i $\frac{5}{4}$ di quella del fratello minore.

Soluzione. Poniamo:
età del maggiore: x
età del secondo: y
età del minore: z

$$\begin{cases} x = \frac{5}{7}(y+z) \\ x - 10 = \frac{5}{4}(y+z-20) \\ y + 4 = \frac{5}{4}(z+4) \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} x=\frac{5}{7}(y+z) \\ \frac{5}{7}(y+z)-10=\frac{5}{4}y+\frac{5}{4}z-25 \\ y+4=\frac{5}{4}z+5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{5}{7}(y+z) \\ \frac{5}{7}y+\frac{5}{7}z-\frac{5}{4}y-\frac{5}{4}z=-15 \\ y-\frac{5}{4}z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{5}{7}(y+z) \\ \frac{15}{28}y+\frac{15}{28}z=15 \\ 4y-5z=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{5}{7}(y+z) \\ y+z=28 \\ 4y-5z=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{5}{7}\cdot 28=20 \\ y=28-z \\ 112-9z=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=20 \\ y=16 \\ z=12 \end{cases}$$

Problema 116. Un serbatoio è riempito da tre diversi condotti in 5 minuti; se fossero aperti solo i primi due condotti il serbatoio si riempirebbe in 10 minuti, mentre, invece, si riempirebbe in 6 minuti se si aprissero solo il secondo e il terzo serbatoio. Determinare quanto tempo ogni condotto riempirebbe da solo lo stesso serbatoio.

Soluzione. Detta h la quantità totale del liquido da inserire nel serbatoio, si può dire che $h=n_1x$; $h=n_2y$ e $h=n_3z$, dove n_1,n_2,n_3 sono la quantità che fuoriesce da ogni condotto e x,y,z i tempi in minuti necessari al riempimento completo. Pertanto

$$\begin{cases} 5(n_1+n_2+n_3)=h \\ 10(n_1+n_2)=h \\ 6(n_2+n_3)=h \end{cases} \qquad \begin{cases} n_1+n_2+n_3=\frac{h}{5} \\ n_1+n_2=\frac{h}{10} \\ n_2+n_3=\frac{h}{6} \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} n_1=\frac{h}{5}-n_2-n_3 \\ n_2=\frac{h}{10}-n_1 \\ n_3=\frac{h}{6}-n_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} n_1=\frac{h}{5}-n_2-n_3 \\ n_2=\frac{h}{10}-n_1 \\ n_3=\frac{h}{6}-n_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_1=\frac{h}{5}-n_2-n_3 \\ n_2=\frac{h}{15} \\ n_3=\frac{h}{6}-\frac{h}{15} \end{cases} \qquad \begin{cases} n_1=\frac{h}{5}-\frac{h}{15}-\frac{h}{10} \\ n_2=\frac{h}{15} \\ n_3=\frac{h}{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_1=\frac{h}{30} \\ n_2=\frac{h}{15} \\ n_3=\frac{h}{10} \end{cases}$$

Pertanto, essendo $x=\frac{h}{n_1}$, $y=\frac{h}{n_2}$ e $z=\frac{h}{n_3}$, avremo $x=30^m$, $y=15^m$ e $z=10^m$
[Si poteva considerare la quantità totale anche come unitaria, cioè considerare $h=1$].

Problema 117. In un pentagono il primo, il secondo e il quarto angolo sono tra loro congruenti e il terzo e il quinto sono tra loro supplementari. Determinare le ampiezze degli angoli del pentagono sapendo che la somma dei $\frac{3}{4}$ del primo e dei $\frac{2}{5}$ del quinto angolo supera di 29° il terzo.

Soluzione. Tre angoli sono tra loro congruenti. Si traduce in linguaggio algebrico passando all'uguaglianza della loro ampiezza, cioè $\alpha=\beta=\delta$. Due angoli sono supplementari se la loro somma è un angolo piatto, cioè $\gamma+\eta=180°$. Sappiamo inoltre che la somma di tutti gli angoli interni è uguale a $180\cdot(n_{lati}-2)=540°$.

Pertanto

$$\begin{cases} 3\alpha = 360 \\ \frac{3}{4}\alpha + \frac{2}{5}\eta = \gamma + 29 \\ \gamma + \eta = 180 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 120 \\ \frac{3}{4} \cdot 120 + \frac{2}{5}(180 - \gamma) = \gamma + 29 \\ \eta = 180 - \gamma \end{cases}$$

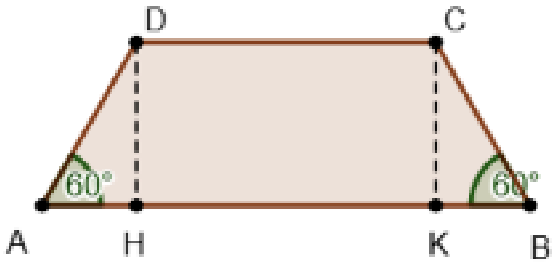
$$\begin{cases} \alpha = 120 \\ 90 + 72 - \frac{2}{5}\gamma = \gamma + 29 \\ \eta = 180 - \gamma \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 120 \\ 133 = \frac{2}{5}\gamma + \gamma \\ \eta = 180 - \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 120 \\ \gamma = 95 \\ \eta = 180 - 95 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 120 \\ \gamma = 95 \\ \eta = 85 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{h}{30} \\ \beta = \frac{h}{15} \\ \gamma = \frac{h}{10} \end{cases}$$

Problema 118. In un trapezio isoscele gli angoli adiacenti alla base hanno l'ampiezza di 60°; aggiungendo 4 alla base minore si ottengono i $\frac{3}{2}$ del lato; sottraendo i $\frac{5}{8}$ del lato dalla base maggiore si ottiene invece la base minore aumentata di 6. Determinare la lunghezza del perimetro.

Soluzione. Ragioniamo sulle proprietà del poligono, osservando la figura



I triangoli AHD e BKC sono la metà di un triangolo equilatero; pertanto $AH = \frac{1}{2}AD$, ma $AH = KB$, per cui $AH + KB = AD$. Ma $CD = AB - (AH + KB) = AB - AD$.

Pertanto, poniamo $AB = x$ e $AD = y$. Scriviamo prima le relazioni assegnate, riferendoci sempre alla figura

$$\begin{cases} CD + 4 = \frac{3}{2}AD \\ AB - \frac{5}{8}AD = CD + 6 \end{cases} \quad \begin{cases} AB - AD + 4 = \frac{3}{2}AD \\ AB - \frac{5}{8}AD = AB - AD + 6 \end{cases}$$

Traduciamo ora le relazioni ricavabili dal testo in linguaggio algebrico

$$\begin{cases} x - y + 4 = \frac{3}{2}y \\ x - \frac{5}{8}y = x - y + 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{5}{2}y - 4 \\ \frac{3}{8}y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2}y - 4 \\ y = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 36 \\ y = 16 \end{cases}$$

Avremo pertanto $AB = 36\,cm$, $AD = 16\,cm$ e $CD = 20\,cm$. Troviamo il perimetro

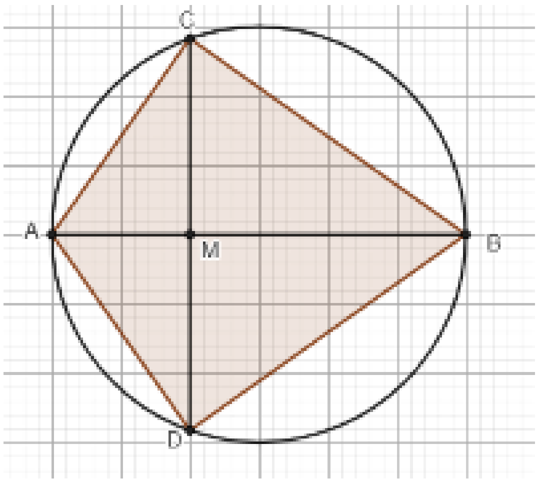
$$2p = 36 + 20 + 2 \times 16 = 88\,cm$$

Problema 119. In una circonferenza di diametro $AB = 30\,cm$ è data una corda CD perpendicolare nel punto M al diametro AB. Sapendo che

$$\frac{3}{4}AM + \frac{1}{3}MB = 20\,cm$$

determinare l'area del quadrilatero ACBD.

Soluzione. Il quadrilatero è composto da due triangoli rettangoli (inscritti in una semicirconferenza) uguali aventi l'ipotenusa in comune. Per i triangoli rettangoli valgono il teorema di Pitagora e i due teoremi di Euclide.



I due segmenti AM e BM sono le proiezioni dei cateti dei triangoli sull'ipotenusa. Potremo quindi ricorrere a Euclide.

Pertanto, poniamo $BM = x$ e $AM = y$.

$$\begin{cases} \frac{3}{4}y + \frac{1}{3}x = 20 \\ x + y = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y + 4x = 240 \\ y = 30 - x \end{cases} \quad \begin{cases} 270 - 9x + 4x = 240 \\ y = 30 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x = -30 \\ y = 30 - x \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 24 \end{cases}$$

Oltre alla relazione data, possiamo trovare la seconda applicando il secondo teorema di Euclide, per il quale $AM : CM = CM : BM$, dove $CM = DM$ è l'altezza del triangolo ABC. L'area del quadrilatero è pertanto il doppio dell'area del triangolo ABC. Posto $CM = x$, avremo

$$6 : x = x : 24$$

da cui

$$x = 12$$

L'area del quadrilatero sarà

$$A = 2 \times \frac{30 \times 12}{2} = 360\,cm^2$$

Problemi vari

Problema 120. Un trapezio ABCD è circoscritto ad una circonferenza ed è AB la base maggiore, CD la base minore, BC il lato obliquo. Si sa che

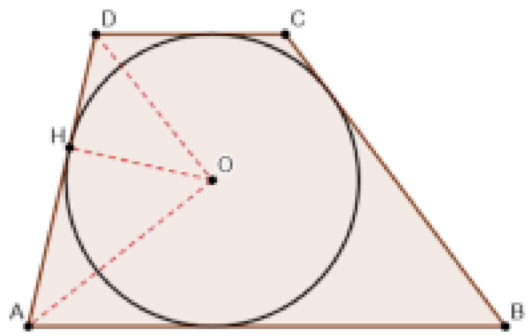
$$\frac{2}{5}AB+\frac{2}{3}AD=88\,cm$$

$$CB-CD=6\,dm \quad AD+BC=14\,dm$$

Determinare i lati del trapezio e, successivamente, l'area.

Soluzione. Nei poligoni circoscritti il centro della circonferenza è l'intersezione di tutte le bisettrici degli angoli. Vale pure la proprietà (per il th. delle tangenti da un punto esterno a una crf)

$$AB+CD=BC+AD=140\,cm$$



Poniamo $AB=x$ e $AD=y$. Avremo, considerando le tre relazioni tra i lati del trapezio

$$CB=140-AD=140-y$$

$$CD=140-AB=140-x$$

da cui

$$\begin{cases}\frac{2}{5}AB+\frac{2}{3}AD=88\\ AB-AD=CB-CD\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{2}{5}x+\frac{2}{3}y=88\\ x-y=6\end{cases}$$

$$\begin{cases}6x+10y=1320\\ x-y=60\end{cases} \quad \begin{cases}3x+5y=660\\ x=y+60\end{cases}$$

$$\begin{cases}3y+180+5y=660\\ x=y+60\end{cases} \quad \begin{cases}y=60\\ x=120\end{cases}$$

Per cui

$$AB=120\,cm \quad AD=60\,cm \quad CB=80\,cm \quad CD= \quad 20\,cm$$

L'altezza del trapezio è uguale al diametro della circonferenza. Ora, l'altezza del trapezio coincide con l'altezza del triangolo avente come base, la differenza delle due basi del trapezio e come lati i due lati obliqui. Troviamo l'area di questo triangolo con la formula di Erone, sapendo che i suoi lati misurano $l_{base}=10\,dm \quad l_1=6\,dm \quad l_2=8\,dm$

$$A_{tri}=\sqrt{p\,(p-l_{base})\,(p-l_1)\,(p-l_2)}=\sqrt{12\times2\times6\times4}=24\,dm^2=2400\,cm^2$$

L'altezza di questo triangolo è

$$h=\frac{2A}{l_{base}}=\frac{4800}{100}=48\,cm$$

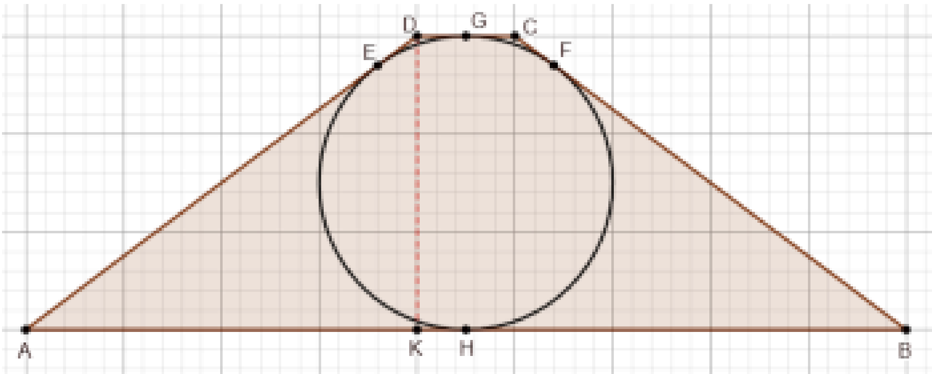
L'area del trapezio è

$$A = \frac{(120+20)\times 48}{2} = 3360\,cm^2$$

Problema 121. Un trapezio isoscele è circoscritto ad una circonferenza di diametro $30\,cm$. Dopo aver dimostrato che il lato obliquo è metà della base maggiore, determinare il perimetro del trapezio sapendo che il diametro è il triplo della base minore.

Soluzione. Nei quadrilateri circoscritti vale la proprietà (per il th. delle tangenti da un punto esterno a una crf) che la somma dei lati opposti è uguale, cioè che

$$AB + CD = BC + AD$$



Ma, considerando come in figura, E,F,G,H i punti di tangenza dei lati del trapezio, la proprietà sopra si può scrivere:

$$2AH + 2DG = 2AE + 2ED$$

$$AH + DG = AE + ED$$

ma $DG = KH$ (dove KH è l'altezza del trapezio), e $AH = AK + HK$; da ciò segue che $AE + ED = AD = AH = \frac{1}{2}AB$.

Troviamo ora il perimetro del trapezio. Sappiamo che il diametro (altezza del trapezio) è il triplo della base minore, cioè $DK = 3CD = 10\,cm$.

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AKD, avremo

$$AD^2 = AK^2 + DK^2$$

ma $AD = AH = AK + 5$ e $DK = 30$, per cui, posto $AH = x$, si può scrivere

$$x^2 = (x-5)^2 + 900$$

$$x^2 = x^2 - 10x + 25 + 900$$

e risolvendo si ottiene $AH = 92,5\,cm$; pertanto $AB = 185\,cm$. Ora, essendo ogni lato obliquo la metà della base maggiore, i due lati obliqui sommati danno l'intera base maggiore, per cui il perimetro è dato dalla somma di due segmenti uguali alla base maggiore e di uno uguale alla base minore. Si trova

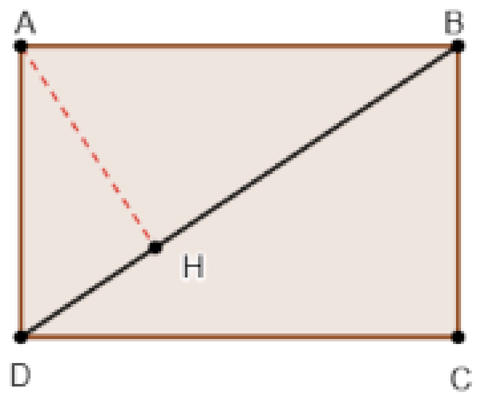
$$2p = 2\times 185 + 10 = 380\,cm$$

Problema 122. In un rettangolo la somma dei $\frac{3}{8}$ della base e dei $\frac{2}{5}$ dell'altezza è $27\,cm$; aggiungendo $20\,cm$ all'altezza si ottengono i $\frac{5}{4}$ della base. Determinare la lunghezza della diagonale e le lunghezze dei due segmenti in cui viene divisa una diagonale del rettangolo dal punto che si ottiene proiettando sulla diagonale un vertice del rettangolo.

Soluzione. La figura mostra come H sia la proiezione di A sulla diagonale BD e i due segmenti in cui la diagonale viene divisa sono DH e BH.

Traduciamo le relazioni

$$\frac{3}{8}AB + \frac{2}{5}BC = 27\,cm \quad BC + 20\,cm = \frac{5}{4}AB$$



Poniamo $AB = x$ e $BC = y$. Avremo in linguaggio algebrico

$$\begin{cases} \frac{3}{8}x + \frac{2}{5}y = 27 \\ y + 20 = \frac{5}{4}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15x + 16y = 1080 \\ 5x - 4y = 80 \end{cases} \quad \begin{cases} 15x + 16y = 1080 \\ -15x + 12y = -240 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - 4y = 80 \\ 28y = 840 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 40 \\ y = 30 \end{cases}$$

Avremo quindi

$$AB = 50\,cm \quad BC = 30\,cm$$

La diagonale minore BD è ottenibile dal teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo BCD, ed essendo i due cateti parti della classica terna pitagorica $3, 4, 5$ e loro multipli avremo

$$BD = 50\,cm$$

Il segmento AH è l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo BAD, per cui $DB \times AH = AD \times AB$ (dalla formula dell'area del triangolo BAD), per cui

$$AH = \frac{AD \times AB}{DB} = \frac{30 \times 40}{50} = 24\,cm$$

Possiamo ora trovare le lunghezze dei due segmenti, sempre applicando il teorema di Pitagora (si può utilizzare anche il 1° th. di Euclide)

$$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{900 - 576} = 18\,cm$$

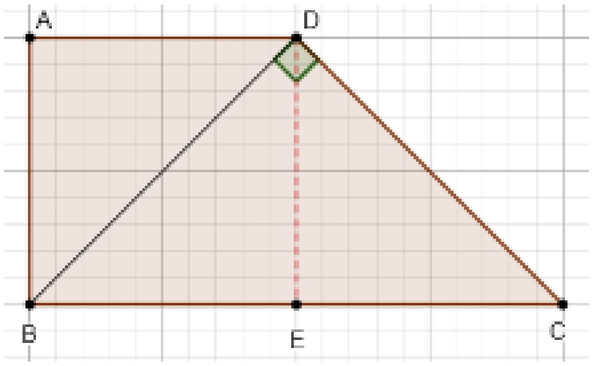
Il segmento $HB = 50 - 18 = 32\,cm$.

Problema 123. In un trapezio rettangolo la proiezione del lato obliquo sulla base maggiore è $9\,m$ e la somma delle basi supera di $5\,m$ il triplo dell'altezza; si sa inoltre che i $\frac{4}{5}$ della base maggiore superano di $8\,m$ l'altezza. Determinare le lunghezze dei lati e verificare che la diagonale minore è perpendicolare al lato obliquo.

Soluzione. La figura mostra la perpendicolarità da verificare tra la diagonale minore e il lato obliquo; la proiezione del lato obliquo sulla base maggiore in figura è rappresentata dal segmento EC.

Traduciamo le relazioni

$$EC = 9\,cm \quad AD + BC = 3DE + 5\,cm \quad \frac{4}{5}BC = DE + 8\,cm$$



Poniamo $BC = x$ e $DE = y$. La base minore si può esprimere in funzione di x, perché $AD = BE = BC - 9$

$$\begin{cases} x - 9 + x = 3y + 5 \\ \frac{4}{5}x = y + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 14 \\ 4x - 5y = 40 \end{cases} \quad \begin{cases} -4x + 6y = -28 \\ 4x - 5y = 40 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 25 \\ y = 12 \end{cases}$$

Avremo quindi

$$EC = 9\,cm \quad BC = 25\,cm \quad DE = 12\,cm$$

La diagonale minore BD è ottenibile dal teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo BED

$$BD = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20\,cm$$

Calcoliamo la lunghezza del lato obliquo sempre col th. di Pitagora applicato al triangolo CED.

$$CD = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15\,cm$$

Per verificare la perpendicolarità ricorriamo all'inverso del teorema di Pitagora applicato al triangolo BDC. Se $BD^2 + CD^2 = BC^2$ allora il triangolo è rettangolo.

$$400 + 225 = 625$$

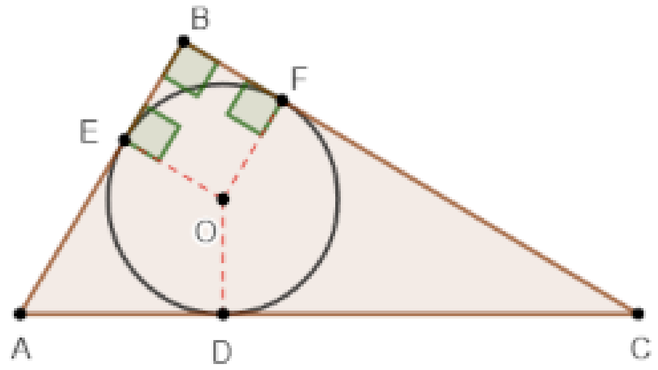
La diagonale BD è pertanto perpendicolare al lato obliquo CD.

Problema 124. In un triangolo rettangolo la somma dei $\frac{7}{8}$ del cateto maggiore e dei $\frac{2}{3}$ del cateto minore è 44; sottraendo ai $\frac{5}{4}$ del cateto minore i $\frac{3}{8}$ del cateto maggiore si ottiene 18. Determinare le lunghezze dei lati del triangolo e del raggio della circonferenza inscritta dopo aver dimostrato che il diametro della circonferenza inscritta è congruente alla differenza tra la somma dei cateti e l'ipotenusa.

Soluzione. La figura mostra la circonferenza inscritta e i punti di tangenza con i lati del triangolo.

Traduciamo le relazioni

$$\frac{7}{8}BC + \frac{2}{3}AB = 44 \quad \frac{5}{4}AB - \frac{3}{8}BC = 18$$



Poniamo $BC = x$ e $AB = y$. Avremo

$$\begin{cases} \frac{7}{8}x + \frac{2}{3}y = 44 \\ \frac{5}{4}y - \frac{3}{8}x = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 21x + 16y = 1056 \\ -3x + 10y = 144 \end{cases} \quad \begin{cases} 21x + 16y = 1056 \\ -21x + 70y = 1008 \end{cases} \quad \begin{cases} -3x + 10y = 144 \\ 86y = 2064 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 32 \\ y = 24 \end{cases}$$

Avremo quindi

$$BC = 32\,cm \quad AB = 24\,cm$$

L'ipotenusa sarà $AC = 40\,cm$.
Dal teorema delle tangenti ad una circonferenza tracciate da un punto esterno ad essa abbiamo

$$AE \cong AD \quad EB \cong BF \quad CD \cong CF$$

Il quadrilatero OEBF è un quadrato avendo tutti gli angoli retti e due lati consecutivi ($EB \cong BF$) congruenti. Pertanto il segmento EO (il raggio della circonferenza inscritta) è congruente a EB.
Allora

$$(AB + BC) - AC \cong (AE + 2EB + FC) - (AD + DC)$$

ma per le congruenze indicate, si può scriver

$$(AB + BC) - AC \cong AD + 2r + DC - AD - DC$$

da cui si ricava

$$(AB + BC) - AC \cong 2r$$

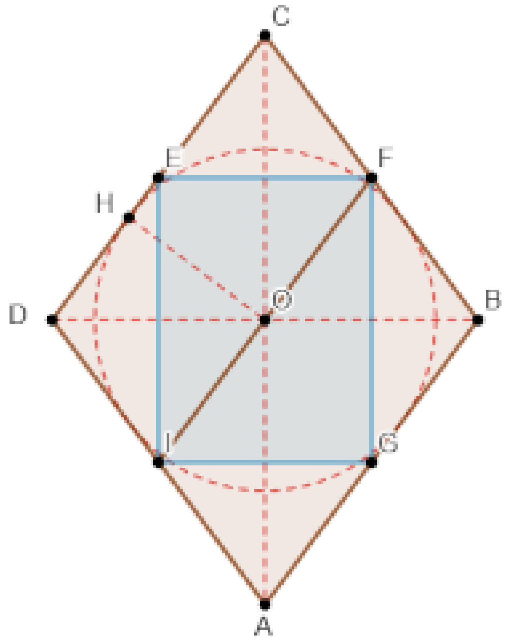
Il raggio della circonferenza inscritta in un triangolo è

$$r = \frac{A}{p} = \frac{\frac{24 \times 32}{2}}{32 + 24 + 40} = \frac{384}{96} = 4\,cm$$

Il diametro richiesto sarà $2r = 8\,cm$.

Problema 125. In un rombo il punto di tangenza di un lato con la circonferenza inscritta divide il lato in due parti, che differiscono di $4,2\,cm$ e tali che sottraendo ai $\frac{3}{8}$ della parte maggiore i $\frac{2}{9}$ della minore si ottiene $2,4\,cm$. Si chiede: 1) di determinare la lunghezza del lato; 2) di determinare la lunghezza del raggio della circonferenza inscritta; 3) di dimostrare che congiungendo i punti medi dei lati di un rombo si ottiene un rettangolo; 4) di verificare che la diagonale del rettangolo e il lato del rombo hanno la stessa lunghezza.

Soluzione. Sia H un punto di tangenza e siano DH e HC le parti in cui il lato viene diviso ($DH < HC$)



Poniamo $HC = x$ e $DH = y$. Avremo

$$\begin{cases} x - y = 4{,}2 \\ \frac{3}{8}x - \frac{2}{9}y = 2{,}4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4{,}2 + y \\ 27x - 16y = 172{,}8 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4{,}2 + y \\ 113{,}4 + 27y - 16y = 172{,}8 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4{,}2 + y \\ 11y = 59{,}4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 9{,}6 \\ y = 5{,}4 \end{cases}$$

La misura del lato del rombo è

$$DC = 15\,cm$$

L'ipotenusa sarà $AC = 40\,cm$.

Troviamo la lunghezza del raggio applicando il secondo teorema di Euclide al triangolo rettangolo DOC (il l'area quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è uguale all'area del rettangolo aventi per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa)

$$OH^2 = DH \cdot HC \quad OH = \sqrt{9{,}6 \cdot 5{,}4} = 7{,}2\,cm$$

Siano E,F,G,I i punti medi dei lati del rombo. Se si considera il triangolo DBC e si uniscono i punti medi E e F dei due lati obliqui si ottiene un segmento parallelo alla base DB; lo stesso vale per i triangoli DAB, ADC e ABC; pertanto il lato EF è parallelo a IG e il lato IE è parallelo al lato FG. I lati consecutivi risultano quindi paralleli alle diagonali del rombo e sono quindi tra loro perpendicolari. Il quadrilatero EFGI è pertanto un rettangolo.

Poiché il triangolo DBC è simile al triangolo ECF ed E e F sono i punti medi dei suoi lati obliqui, la base EF del rettangolo sarà la metà della diagonale minore del rombo; analogamente FG sarà la metà della diagonale maggiore.

Troviamo le metà OD e OC delle diagonali col primo teorema di Euclide applicato al triangolo DOC e quindi anche i lati del rettangolo

$$OD = \sqrt{15 \cdot 5{,}4} = 9\,cm \quad OD = \sqrt{15 \cdot 9{,}6} = 12\,cm$$

la diagonale del rettangolo sarà quindi, applicando il th. di Pitagora

$$IF = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15\,cm$$

cioè uguale alla lunghezza del lato del rombo.

Parte II.

Equazioni di 2° grado

Esercizio 126. Ridurre in forma canonica e risolvere la seguente equazione

$$x(x-2)(x+3) = x(x+2)(x-3)$$

Soluzione. Svolgiamo i calcoli

$$x\left(x^2+3x-2x-6\right) = x\left(x^2-3x+2x-6\right)$$

$$\cancel{x^3}+3x^2-2x^2\cancel{-6x} = \cancel{x^3}-3x^2+2x^2\cancel{-6x}$$
$$2x^2 = 0$$

l'equazione in forma canonica è monomia e la soluzione è $x_{1,2} = 0$

Esercizio 127. Risolvere la seguente equazione di secondo grado numerica intera e incompleta

$$(2x-1)(3x+2) = 3x-2+x(x-2)$$

Soluzione. Svolgiamo

$$6x^2+4x-3x\cancel{-2} = 3x\cancel{-2}+x^2-2x$$

portiamo tutti i termini al primo membro e sommiamo i termini simili

$$5x^2 = 0$$

Equazione monomia, soluzioni $x_{1,2} = 0$

Esercizio 128. Risolvere la seguente equazione di secondo grado numerica intera e incompleta

$$\frac{3}{5}x^2 - x = 0$$

Soluzione. Equazione cosiddetta spuria; raccogliamo la x

$$x\left(\frac{3}{5}x-1\right) = 0$$

applichiamo la legge dell'annullamento del prodotto

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{5}{3}$$

Esercizio 129. Risolvere la seguente equazione di secondo grado numerica e incompleta

$$\frac{x^2+3x+2}{10} - \frac{x}{3}\left(\frac{1}{5}+\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{15}\right)x$$

Soluzione. Svolgiamo le operazioni

$$\frac{x^2+3x+2}{10} - \frac{x}{3}\left(\frac{2+5x}{10}\right) = \left(\frac{5+2}{30}\right)x$$

moltiplichiamo tutto per il $mcm = 30$

$$3x^2\cancel{+9x}+6\cancel{-2x}-5x^2 = \cancel{7x}$$

Equazione cosiddetta pura

$$2x^2 = 6$$

estraiamo la radice

$$x_1 = -\sqrt{3} \quad x_2 = \sqrt{3}$$

Esercizio 130. Risolvere la seguente equazione

$$\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{2}\right)^3=\frac{2}{3}\left(x-\frac{9}{4}\right)\left(\frac{4}{9}x^2+x+\frac{9}{4}\right)$$

Soluzione. Svolgiamo le operazioni

$$\frac{8}{27}x^3-2x^2+\frac{9}{2}x-\frac{27}{8}=\frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}x^3+x^2+\frac{9}{4}x-x^2-\frac{9}{4}x-\frac{81}{16}\right)$$

$$\cancel{\frac{8}{27}x^3}-2x^2+\frac{9}{2}x\cancel{-\frac{27}{8}}=\cancel{\frac{8}{27}x^3}+\cancel{\frac{2}{3}x^2}\cancel{+\frac{3}{2}x}\cancel{-\frac{2}{3}x^2}\cancel{-\frac{3}{2}x}\cancel{-\frac{27}{8}}$$

Moltiplichiamo tutto per $mcm=2$

$$-4x^2+9x=0$$

Equazione cosiddetta spuria

$$-x(4x-9)=0$$

annullamento del prodotto

$$x_1=0 \quad x_2=\frac{9}{4}$$

Esercizio 131. Risolvere la seguente equazione

$$\left(x\sqrt{2}+1\right)^2+2x\left(x-\sqrt{2}\right)=x^2+4$$

Soluzione. Svolgiamo le operazioni

$$2x^2+\cancel{2\sqrt{2}x}+1+2x^2\cancel{-2\sqrt{2}x}=x^2+4$$

$$3x^2=3$$

Equazione cosiddetta pura

$$x_{1,2}=\pm 1$$

Esercizio 132. Risolvere la seguente equazione riconducibile, con un'opportuna sostituzione, a equazione incompleta

$$(x-1)^2=4$$

Soluzione. Invece di svolgere il quadrato si può introdurre una incognita ausiliaria $z=x-1$, per cui

$$z^2=4$$

$$z=\pm 2$$

Troviamo ora le soluzioni in x

$$x-1=-2 \quad x_1=-1$$

$$x-1=2 \quad x_2=3$$

Esercizio 133. Risolvere la seguente equazione completa

$$x^2-x-6=0$$

Soluzione. Tutte le equazioni in questa forma si possono risolvere utilizzando la cosiddetta formula risolutiva

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dove, in questo caso, $a = 1$, (coefficiente del termine di secondo grado), $b = -1$, (coefficiente del termine di primo grado) e $c = -6$ (termine noto)

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{array}{l} \nearrow \quad \frac{1-5}{2} = -2 \\ \searrow \quad \frac{1+5}{2} = 3 \end{array}$$

Esercizio 134. Risolvere la seguente equazione completa

$$6x^2 + 13x + 6 = 0$$

Soluzione. Tutte le equazioni in questa forma si possono risolvere utilizzando la cosiddetta formula risolutiva

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dove, in questo caso, $a = 6$, (coefficiente del termine di secondo grado), $b = 13$, (coefficiente del termine di primo grado) e $c = 6$ (termine noto)

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 144}}{12} = \frac{-13 \pm 5}{12} \begin{array}{l} \nearrow \quad \frac{-13-5}{12} = -\frac{3}{2} \\ \searrow \quad \frac{-13+5}{12} = -\frac{2}{3} \end{array}$$

Esercizio 135. Risolvere la seguente equazione completa

$$3x^2 - \frac{7}{6}x - \frac{1}{6} = 0$$

Soluzione. Riscriviamo l'equazione con coefficienti interi

$$18x^2 - 7x - 1 =$$

applichiamo la formula risolutiva

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49+72}}{36} = \frac{7 \pm 11}{36} \begin{array}{l} \nearrow \quad \frac{7-11}{36} = -\frac{1}{9} \\ \searrow \quad \frac{7+11}{36} = \frac{1}{2} \end{array}$$

Esercizio 136. Risolvere la seguente equazione completa con coefficienti irrazionali

$$2\sqrt{3}x^2 - x - 2\sqrt{3} = 0$$

Soluzione. Applichiamo la formula risolutiva

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4\sqrt{3}} = \frac{1 \pm 7}{4\sqrt{3}} \begin{array}{l} \nearrow \quad \frac{1-7}{4\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \searrow \quad \frac{1+7}{4\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{array}$$

Esercizio 137. Risolvere la seguente equazione completa con coefficienti irrazionali

$$(2x-1)^3-(2x+1)^3=(2x+1)^2$$

Soluzione. Svolgiamo i prodotti notevoli

$$\cancel{8x^3}-12x^2\cancel{+6x}-1\cancel{-8x^3}-12x^2\cancel{-6x}-1=4x^2+4x+1$$

$$-28x^2-4x-3=0$$

e moltiplicando per -1

$$28x^2+4x+3=0$$

Applichiamo la formula risolutiva

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-336}}{4\sqrt{3}}$$

l'equazione è impossibile, perché nell'insieme dei numeri reali ogni radice di ordine pari deve avere un radicando positivo.

Infatti nella formula risolutiva il termine $\sqrt{b^2-4ac}=\Delta$ è detto discriminante, perché determina le possibili soluzioni, cioè

$$\begin{array}{ll}\Delta>0 & due\,soluzioni\,reali\,e\,distinte\\ \Delta=0 & due\,soluzioni\,coincidenti\\ \Delta<0 & nessuna\,soluzione\,reale\end{array}$$

Esercizio 138. Risolvere la seguente equazione completa con coefficienti irrazionali

$$3\sqrt{3}x^2-x\left(\sqrt{6}+6\right)+2\sqrt{2}=0$$

Soluzione. Applichiamo la formula risolutiva

Calcoliamo prima il discriminante

$$\Delta=\left(\sqrt{6}+6\right)^2-24\sqrt{6}=6+12\sqrt{6}+36-24\sqrt{6}=6-12\sqrt{6}+36=\left(\sqrt{6}-6\right)^2>0$$

per cui

$$x_{1,2}=\frac{\left(\sqrt{6}+6\right)\pm\left(\sqrt{6}-6\right)}{6\sqrt{3}}=\begin{array}{ll}\nearrow & \frac{12}{6\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\\ \searrow & \frac{2\sqrt{6}}{6\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}\end{array}$$

Esercizio 139. Risolvere la seguente equazione completa con coefficienti irrazionali

$$\left(x-\frac{x-2}{3}\right)\left(x-\frac{x-3}{2}\right)-\frac{(x-2)(x-3)}{6}=\frac{(x+1)^2}{2}$$

Soluzione. Riscriviamo

$$\left(\frac{2x+2}{3}\right)\left(\frac{x+3}{2}\right)-\frac{(x-2)(x-3)}{6}=\frac{(x+1)^2}{2}$$

Moltiplichiamo per il $mcm=6$

$$2x^2\cancel{+6x}+2x\cancel{+6}-x^2+3x+2x\cancel{-6}=3x^2\cancel{+6x}+3$$

$$-2x^2+7x-3=0$$

$$2x^2-7x+3=0$$

Applichiamo la formula risolutiva

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{4}=\begin{array}{ll}\nearrow & \frac{7-5}{4}=\frac{1}{2}\\ \searrow & \frac{7+5}{4}=3\end{array}$$

Esercizio 140. Risolvere la seguente equazione completa con coefficienti irrazionali

$$\frac{2}{3}\left\{\frac{3}{2}x\left[\frac{(3x-2)^3}{10}-\frac{(2x-3)^3}{15}-\frac{13(x-1)^3}{6}\right]-\frac{21x(x-1)^2}{4}\right\}=\frac{3x-2}{2}$$

Soluzione. Svolgiamo i calcoli

$$\frac{2}{3}\left\{\frac{3}{2}x\left[\frac{27x^3-54x^2+36x-8}{10}-\frac{8x^3-36x^2+54x-27}{15}-\frac{13\left(x^3-3x^2+3x-1\right)^3}{6}\right]-\frac{21x\left(x^2-2x+1\right)^2}{4}\right\}=\frac{3x-2}{2}$$

$$\frac{2}{3}\left\{\frac{3}{2}x\left[\frac{\cancel{81x^3}-162x^2\cancel{+108x}-24\cancel{-16x^3}+72x^2\cancel{-108x}+54\cancel{-65x^3}+195x^2-195x+65}{30}\right]-\frac{21x^3-42x^2+21x}{4}\right\}=\frac{3x-2}{2}$$

$$\frac{2}{3}\left\{\frac{3}{2}x\left[\frac{105x^2-195x+95}{30}\right]-\frac{21x^3-42x^2+21x}{4}\right\}=\frac{3x-2}{2}$$

$$\frac{2}{3}\left\{\frac{3}{2}x\left[\frac{21x^2-39x+19}{6}\right]-\frac{21x^3-42x^2+21x}{4}\right\}=\frac{3x-2}{2}$$

$$\frac{2}{3}\left\{\frac{\cancel{21x^3}-39x^2+19x\cancel{-21x^3}+42x^2-21x}{4}\right\}=\frac{3x-2}{2}$$

$$\frac{2}{3}\left\{\frac{3x^2-2x}{4}\right\}=\frac{3x-2}{2}$$

$$\frac{3x^2-2x}{6}=\frac{9x-6}{6}$$

$$3x^2-11x+6=0$$

Applichiamo la formula risolutiva

$$x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{121-72}}{6}=\begin{array}{l}\nearrow \quad \frac{11-7}{6}=\frac{2}{3}\\ \searrow \quad \frac{11+7}{6}=3\end{array}$$

Equazioni e moduli

Esercizio 141. Risolvere la seguente equazione completa con coefficienti irrazionali

$$x^2-2|x|+1=0$$

Soluzione. Per definizione sappiamo che

$$|x|=\begin{cases} x & per \quad x\geq 0\\ -x & per \quad x<0\end{cases}$$

e quindi l'equazione si divide in due sistemi

$$\begin{cases} x\geq 0\\ x^2-2x+1=0\end{cases} \qquad \begin{cases} x<0\\ x^2+2x+1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 0\\ (x-1)^2=0\end{cases} \qquad \begin{cases} x<0\\ (x+1)^2=0\end{cases}$$

Le soluzioni sono $x=\pm 1$

Esercizio 142. Risolvere la seguente equazione completa con coefficienti irrazionali

$$|x-3|+2x^2-5x-0,5=0$$

Soluzione. Per definizione sappiamo che

$$|x-3|=\begin{cases} x-3 & per \quad x\geq 3 \\ 3-x & per \quad x<3 \end{cases}$$

e quindi l'equazione si divide in due sistemi

$$\begin{cases} x\geq 3 \\ 2x^2-4x-3,5=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<3 \\ 2x^2-6x+2,5=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 3 \\ x=\frac{4\pm\sqrt{16+28}}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} x<3 \\ x=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 3 \\ nessuna\, sol. \end{cases} \qquad \begin{cases} x<3 \\ x_1=\frac{1}{2} \;\; x_2=\frac{5}{2} \end{cases}$$

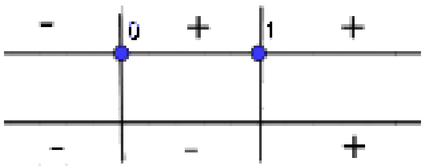
Le soluzioni sono $x=\pm 1$

Esercizio 143. Risolvere la seguente equazione completa con coefficienti irrazionali

$$|x|-2\,|x-1|=x^2-10$$

Soluzione. Qui abbiamo due termini in modulo, per cui le soluzioni dovranno appartenere ad intervalli che soddisfano entrambe le condizioni, determinate dallo studio dei segni di x e $x-1$;

$$\begin{cases} 1^\circ\, mod\geq 0 & x\geq 0 \\ 2\, mod\geq 0 & x\geq 1 \end{cases}$$



gli intervalli, come nello schema, sono $x<0$; $0\leq x\leq 1$; $x>1$
e quindi l'equazione si divide in tre sistemi

$$\begin{cases} x<0 \\ -x-2\,(1-x)=x^2-10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0\leq x\leq 1 \\ x-2\,(1-x)=x^2-10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>1 \\ x-2\,(x-1)=x^2-10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<0 \\ x^2-x-8=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0\leq x\leq 1 \\ x^2-3x-8=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>1 \\ x^2+x-12=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<0 \\ x=\frac{1\pm\sqrt{1+32}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 0\leq x\leq 1 \\ x=\frac{3\pm\sqrt{9+32}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x>1 \\ x=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2} \end{cases}$$

le soluzioni accettabili, perché appartenenti agli intervalli indicati sono:

$$\begin{cases} x<0 \\ x=1-\frac{\sqrt{33}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 0\leq x\leq 1 \\ nessuna\, sol. \end{cases} \qquad \begin{cases} x>1 \\ x=3 \end{cases}$$

Esercizio 144. Risolvere la seguente equazione completa con coefficienti irrazionali

$$|x-1|+2|x-5|-4\left|x^2+1\right|=0$$

Soluzione. Qui abbiamo tre termini in modulo, per cui le soluzioni dovranno appartenere ad intervalli che soddisfano entrambe le condizioni,

$$\begin{cases} 1^\circ mod \geq 0 & x \geq 1 \\ 2 mod \geq 0 & x \geq 5 \\ 3^\circ mod & \forall x \end{cases}$$

gli intervalli, come nello schema, sono $x<1$; $1 \leq x \leq 5$; $x>5$
e quindi l'equazione si divide in tre sistemi

$$\begin{cases} x<1 \\ -3x-4x^2+7=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 3x+5-4x^2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>5 \\ 3x-15-4x^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<1 \\ 4x^2+3x-7=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 4x^2+x-5=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>5 \\ 4x^2-3x+15=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<1 \\ x=\frac{-3\pm 11}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ x=\frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} x>5 \\ x=\frac{3\pm\sqrt{9-240}}{8} \end{cases}$$

le soluzioni accettabili, perché appartenenti agli intervalli indicati sono:

$$\begin{cases} x<5 \\ x=-\frac{7}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ x=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 5 \\ nessuna\ sol. \end{cases}$$

Relazioni tra radici e coefficienti del polinomio di 2° grado in forma normale

Ricordiamo brevemente che partendo dalla formula risolutiva e sommano e moltiplicando le due soluzioni (se sono reali) si ottengono risultati che mettono in evidenza le seguenti relazioni

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$$

nel caso particolare in cui $a=0$ si ha

$$s=x_1+x_2=-b \quad p=x_1 \cdot x_2=c$$

cioè la somma delle due radici è uguale all'opposto del coefficiente dell'incognita con grado uno, e il prodotto delle radici è uguale al termine noto.

Esempio. Data l'equazione $x^2-9x+8=0$, avremo che $s=9$ e $p=8$.

Esercizio 145. Data una soluzione, indicata con x_1, trovare x_2 senza risolvere l'equazione

$$3x^2-2x-8=0$$

con $x_1=2$.

Soluzione. In questa equazione $s=\frac{2}{3}$ e $p=-\frac{8}{3}$. Scegliamo di ottenere le soluzioni dal loro prodotto. Infatti, se $x_1x_2=p=-\frac{8}{3}$, allora $x_2=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}$.

Esercizio 146. Scrivere un'equazione di 2° grado che abbia come soluzione i numeri 2 e -2.

Soluzione. Allora $s = 0$ e $p = -4$. Le due radici sono opposte e, ricordando le equazioni pure, ritroviamo che il coefficiente della x è uguale a 0. L'equazione sarà $x^2 - 4 = 0$ o una qualsiasi che si ottiene moltiplicando i coefficienti per un numero dato diverso da zero.

Esercizio 147. Scomporre il polinomio di 2° grado: $x^2 - x - 2$.

Soluzione. Il trinomio dato è della forma $ax^2 + bx + c$, come il primo membro di un'equazione in forma canonica. Calcoliamo il discriminante per valutare l'esistenza delle soluzioni

$$\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$$

il polinomio avrà quindi due radici, cioè due numeri che sostituiti all'incognita lo rendono uguale a zero. La somma e il prodotto di questi due numeri è

$$s = 1 \quad p = -2$$

e i due numeri saranno $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$. La scomposizione dà

$$(x+1)(x-2) = 0$$

Equazioni numeriche frazionarie

Esercizio 148. Risolvere la seguente equazione

$$\frac{x}{x+2} - \frac{3}{2-x} = \frac{8}{x^2-4}$$

Soluzione. Ricordiamo che $2 - x = -(x-2)$. Il dominio sarà $x \neq \pm 2$. Il $mcm = (x-2)(x+2)$.

$$\frac{x}{x+2} + \frac{3}{x-2} = \frac{8}{(x-2)(x+2)}$$

$$x(x-2) + 3(x+2) = 8$$

$$x^2 - 2x + 3x + 6 = 8 \quad x^2 + x + 6 = 0$$

possiamo risolvere velocemente anche con le proprietà delle radici; infatti, $s = -1$ e $p = 6$, per cui

$$x_1 = -3 \quad x_2 = 2 \textit{ non accettabile}$$

Esercizio 149. Risolvere la seguente equazione

$$\frac{x-1}{x^2-4} \cdot \frac{12x-24}{x^2-1} + 2\left(x + \frac{1}{x-2}\right) : \frac{x^2-1}{3x-6} = \frac{3+x}{2x+4}$$

Soluzione. Scomponiamo i polinomi nel prodotto dei loro fattori

$$\frac{x-1}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{12(x-2)}{(x-1)(x+1)} + 2\frac{(x-1)^2}{x-2} \cdot \frac{3(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3+x}{2(x+2)}$$

Semplifichiamo ponendo prima le condizioni di esistenza delle frazioni

$$x \neq \pm 2 \quad x \neq \pm 1$$

$$\frac{12}{(x+2)(x+1)}+\frac{6(x-1)}{(x+1)}=\frac{3+x}{2(x+2)}$$

il $mcm=2(x+2)(x+1)$

$$24+12(x-1)(x+2)=(3+x)(x+1)$$

$$\cancel{24}+12x^2+12x\cancel{-24}=4x+3+x^2$$

$$11x^2+8x-3=0$$

applichiamo la formula risolutiva

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{64+132}}{22}=\frac{-8\pm 14}{22}$$

$$x_1=\frac{3}{11}\quad x_2=-1\ \textit{non accettabile}$$

Esercizio 150. Risolvere la seguente equazione

$$\frac{5(12-7x)}{3(6x^2+5x-6)}=\frac{1}{2x+3}-\frac{1}{3}$$

Soluzione. Scomponiamo il polinomio trovando le sue radici (se $s=-\frac{5}{6}$ e $p=-1$, allora i due numeri non sono così immediati da trovare; sappiamo però che sono uno l'antireciproco dell'altro)

$$x=\tfrac{-5\pm 13}{12}\quad x_1=-\tfrac{3}{2}\quad x_2=\tfrac{2}{3}$$

per cui $6\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)=\cancel{6}\left(\frac{2x+3}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{3x-2}{\cancel{3}}\right)=(2x+3)(3x-2)$

$$\frac{5(12-7x)}{3(2x+3)(3x-2)}=\frac{3-2x-3}{2x+3}$$

Poniamo le condizioni di esistenza

$$C.E.:\ x\neq-\tfrac{3}{2}\quad x\neq\tfrac{2}{3}$$

il $mcm=3(2x+3)(3x-2)$

$$60-35x=-2x(3x-2)$$

$$60-35x=-6x^2+4x$$

$$6x^2-39x+60=0$$

e dividendo per 3

$$2x^2-13x+20=0$$

applichiamo la formula risolutiva

$$x=\frac{13\pm\sqrt{169-160}}{4}=\frac{13\pm 3}{4}$$

$$x_1=\frac{5}{2}\quad x_2=4$$

Esercizio 151. Risolvere la seguente equazione

$$\frac{x}{x\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-x}{x\sqrt{3}-1}+\frac{2\sqrt{3}}{3x^2-1}$$

Soluzione. Scomponiamo il polinomio di secondo grado (differenza di due quadrati)

$$\frac{x}{x\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-x}{x\sqrt{3}-1}+\frac{2\sqrt{3}}{\left(x\sqrt{3}+1\right)\left(x\sqrt{3}-1\right)}$$

Poniamo le condizioni di esistenza

$$C.E.: x\neq\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\left(=\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

il $mcm=\left(x\sqrt{3}+1\right)\left(x\sqrt{3}-1\right)$

$$x\left(x\sqrt{3}-1\right)=\left(\sqrt{3}-x\right)\left(x\sqrt{3}+1\right)+2\sqrt{3}$$

$$x^2\sqrt{3}\cancel{-x}=3x+\sqrt{3}-x^2\sqrt{3}\cancel{-x}+2\sqrt{3}$$

$$2x^2\sqrt{3}-3x-3\sqrt{3}=0$$

applichiamo la formula risolutiva

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{4\sqrt{3}}=\frac{3\pm 9}{4\sqrt{3}}$$

$$x_1=-\frac{3}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\quad x_2=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

Esercizio 152. Risolvere la seguente equazione

$$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+x-1}-\frac{(2x-1)^2}{x^2+2x+1}=\frac{8}{6x-3}-2$$

Soluzione. Scomponiamo i polinomi al denominatore

$$\frac{(2x+1)^2}{(x+1)(2x-1)}-\frac{(2x-1)^2}{(x+1)^2}=\frac{14-12x}{3(2x-1)}$$

Poniamo le condizioni di esistenza

$$C.E.: x\neq\frac{1}{2}\ \ x\neq -1$$

il $mcm=3(x+1)^2(2x-1)$

$$3(2x+1)^2(x+1)-3(2x-1)^3=(14-12x)(x+1)^2$$

$$(3x+3)\left(4x^2+4x+1\right)-3\left(8x^3-12x^2+6x-1\right)=(14-12x)\left(x^2+2x+1\right)$$

$$\cancel{12x^3}+12x^2+3x+12x^2+12x+3\cancel{-24x^3}+36x^2-18x+3=$$
$$=14x^2+28x+14\cancel{-12x^3}-24x^2-12x$$

$$70x^2-19x-8=0$$

applichiamo la formula risolutiva

$$x=\frac{19\pm\sqrt{361+2240}}{140}=\frac{19\pm 51}{140}$$

$$x_1=-\frac{8}{35}\quad x_2=\frac{1}{2}\ non\, accettabile$$

Equazioni letterali

Esercizio 153. Risolvere la seguente equazione

$$(3x-a)\,x = 2ax - x^2$$

Soluzione. Svolgiamo

$$3x^2 - ax = 2ax - x^2$$

$$4x^2 - 3ax = 0$$

equazione spuria (si risolve risolvendo a fattor comune e applicando la legge dell'annullamento del prodotto

$$x\,(4x-3a) = 0$$

ponendo uguali a zero entrambi i fattori, si ha

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{3}{4}a$$

Esercizio 154. Risolvere la seguente equazione

$$(2x-3a)\,(2x+3a) + ax = (x-a)\,(3x+4a)$$

Soluzione. Svolgiamo

$$4x^2 - 9a^2 \cancel{+ax} = 3x^2 + \cancel{4ax - 3ax} - 4a^2$$

$$x^2 = 5a^2$$

equazione pura (si risolve estraendo la radice quadrata e avremo due soluzioni opposte)

$$x = \pm a\sqrt{5}$$

Esercizio 155. Risolvere la seguente equazione a coefficienti letterali frazionari

$$\frac{x}{k-2} + \frac{x^2}{k+2} = 0$$

Soluzione. L'equazione presenta due frazioni con denominatori letterali; è quindi necessario porre le condizioni che ne garantiscano l'esistenza,

$$C.E: k \neq \pm 2$$

il $mcm = (k-2)\,(k+2)$; valendo le condizioni poste moltiplichiamo tutto per il mcm

$$x^2\,(k-2) + x\,(k+2) = 0$$

equazione spuria

$$x\,[(k-2)\,x + (k+2)]$$

la prima soluzione è

$$x = 0$$

il secondo fattore $(k-2)\,x = -(k+2)$ deve essere discusso in base ai valori che può assumere il parametro k

se $k = \pm 2$, l'equazione perde di significato (come indicato nelle C.E.)

se $k \neq \pm 2$, allora

$$x = \frac{k+2}{2-k}$$

Esercizio 156. Risolvere la seguente equazione a coefficienti letterali frazionari

$$x^2-2\sqrt{3}x+3+a^2=0$$

Soluzione. Equazione completa. (il coefficiente di x^2 è uguale a 1; il coefficiente di x è $2\sqrt{3}$; il termine noto è $3+a$. Calcoliamo il discriminante, che andrà discusso per garantire l'esistenza della radice nell'insieme reale e per valutare il tipo di soluzioni

$$\Delta=12-12-4a^2=-4a^2$$

se $a\neq 0$, l'equazione è impossibile, perché $\sqrt{-4a^2}$ non è una radice reale
se $a=0$, allora avremo una soluzione doppia uguale a

$$x_{1,2}=\frac{2\sqrt{3}\pm 0}{2}=\sqrt{3}$$

Esercizio 157. Risolvere la seguente equazione a coefficienti letterali frazionari

$$x^2-6bx+25b^2=0$$

Soluzione. Equazione completa. (il coefficiente di x^2 è uguale a 1; il coefficiente di x è $-6b$; il termine noto è $25b^2$. Calcoliamo il discriminante, che andrà discusso per garantire l'esistenza della radice nell'insieme reale e per valutare il tipo di soluzioni

$$\Delta=36b^2-100b^2=-64b^2$$

se $b\neq 0$, l'equazione è impossibile, perché $\sqrt{-64b^2}$ non è una radice reale
se $b=0$, allora avremo una soluzione doppia uguale a

$$x_{1,2}=\frac{0\pm 0}{2}=0$$

Esercizio 158. Risolvere la seguente equazione a coefficienti letterali frazionari

$$x^2+2ax+a^2-9b=0$$

Soluzione. Equazione completa. Calcoliamo il discriminante, che andrà discusso per garantire l'esistenza della radice nell'insieme reale e per valutare il tipo di soluzioni

$$\Delta=4a^2-4a^2+36b=36b$$

se $b<0$, l'equazione è impossibile, perché il radicale sarebbe negativo
se $b\geq 0$, allora

$$x_{1,2}=\frac{-2a\pm 6\sqrt{b}}{2}=-a\pm 3\sqrt{b}$$

Esercizio 159. Risolvere la seguente equazione a coefficienti letterali frazionari

$$(2a-1)\,x^2-ax=0$$

Soluzione. Equazione spuria. Raccogliamo a fattor comune

$$x\left[(2a-1)x-a\right]=0$$

Una soluzione sarà $x_1=0$
Il secondo fattore è

$$(2a-1)x=a$$

se $a=\frac{1}{2}$, l'equazione è impossibile, perché si ha $0x=\frac{1}{2}$
se $a\neq\frac{1}{2}$, allora

$$x_2=\frac{a}{2a-1}$$

Esercizio 160. Risolvere la seguente equazione a coefficienti letterali frazionari

$$a(x-1)^2-(x-a)^2+a^2=2(ax-1)$$

Soluzione. Svolgiamo

$$ax^2-2ax+a-x^2\cancel{+2ax}\cancel{-a^2+a^2}=\cancel{2ax}-2$$

$$x^2(a-1)-2ax+a+2=0$$

L'equazione è completa e calcoliamo, quindi, il suo discriminante

$$\Delta=4a^2-4(a-1)(a+2)=4a^2-4a^2-8a+4a+8=8-4a$$

tale discriminante deve essere sempre positivo o nullo, per cui
se $8-4a<0$, cioè $a>2$, allora l'equazione risulta impossibile
se $8-4a\geq 0$, cioè $a\leq 2$, avremo due soluzioni reali e distinte se $a\neq 1$

$$x_{1,2}=\frac{2a\pm\sqrt{8-4a}}{2(a-1)}=\frac{a\pm\sqrt{2-a}}{a-1}$$

se $a=1$, l'equazione diventa di primo grado e ha come soluzione $x=\frac{3}{2}$.

Esercizio 161. Risolvere la seguente equazione a coefficienti letterali frazionari

$$x^2-9x=\frac{4x^2-11mx+3m}{m+1}$$

Soluzione. L'equazione richiede di porre la condizione $m\neq -1$, per cui moltiplicando per il mcm

$$x^2(m+1)-9x(m+1)=4x^2-11mx+3m$$

$$x^2(m-3)+x(2m-9)-3m=0$$

L'equazione diventa di primo grado se $m=3$ e ha la forma $-3x=9$ ha come soluzione

$$x=-3$$

L'equazione è completa e calcoliamo, quindi, il suo discriminante

$$\Delta=(9-2m)^2+12m(m-3)=81+4m^2-36m+12m^2-36m=(4m-9)^2$$

tale discriminante è sempre positivo o nullo, per cui
se $m\neq -1$ e $m\neq 3$, allora

$$x_{1,2}=\frac{(9-2m)\pm(4m-9)}{2(m-3)}=\begin{array}{l}\nearrow\quad \frac{-2m+9-4m+9}{2(m-3)}=-3\\ \searrow\quad \frac{-2m+9+4m-9}{2(m-3)}=\dfrac{m}{m-3}\end{array}$$

Esercizio 162. Risolvere la seguente equazione frazionaria a coefficienti letterali frazionari

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{a}=\frac{a+4}{2a}$$

Soluzione. L'equazione è frazionaria perché presenta un denominatore contenente l'incognita; ha pure coefficienti letterali frazionari. Risulta perciò necessario studiare le condizioni affinché l'equazione non perda di significato e il dominio delle radici della equazione.

Se $a=0$ l'equazione perde di significato; pertanto opereremo con la condizione $a\neq 0$

L'equazione avrà come dominio $x\neq -1$; il $mcm=2a(x+1)$

$$2a+4x(x+1)=(a+4)(x+1)$$

$$2a+4x^2\cancel{+4x}=ax+a\cancel{+4x}+4$$

$$4x^2-ax+a-4=0$$

L'equazione è completa e calcoliamo, quindi, il suo discriminante

$$\Delta=a^2-16(a-4)=a^2-16a+64=(a-8)^2$$

tale discriminante è sempre positivo o nullo, per cui

se $x\neq -1$ e $a\neq 0$, allora

$$x_{1,2}=\frac{a\pm(a-8)}{8}=\begin{array}{l}\nearrow \quad \frac{a-a+8}{8}=1\\ \searrow \quad \frac{a+a-8}{8}=\dfrac{a-4}{4}\end{array}$$

Esercizio 163. Risolvere la seguente equazione frazionaria a coefficienti letterali frazionari

$$\frac{x+3}{x+2}+\frac{x}{a^2+4a+3}=\frac{a+5}{a+3}$$

Soluzione. L'equazione è frazionaria perché presenta un denominatore contenente l'incognita; ha pure coefficienti letterali frazionari. Risulta perciò necessario studiare le condizioni affinché l'equazione non perda di significato e il dominio delle radici della equazione. Scomponiamo

$$\frac{x+3}{x+2}+\frac{x}{(a+3)(a+1)}=\frac{a+5}{a+3}$$

Se $a=-3$ l'equazione perde di significato; pertanto opereremo con la condizione $a\neq -3$

Se $a=-1$ l'equazione perde di significato; pertanto opereremo con la condizione $a\neq -1$

L'equazione avrà come dominio $x\neq -2$; il $mcm=(a+3)(a+1)(x+1)$

$$(a+3)(a+1)(x+3)+x(x+2)=(a+5)(a+1)(x+2)$$

$$\left(a^2+4a+3\right)(x+3)+x^2+2x=\left(a^2+6a+5\right)(x+2)$$

applichiamo la proprietà distributiva

$$\left(a^2+4a+3\right)x+3a^2\cancel{+12a}+9+x^2+2x=\left(a^2+6a+5\right)x+2a^2\cancel{+12a}+10$$

Raccogliamo

$$x^2+x\left(\cancel{a^2}+4a\cancel{+3}\cancel{+2}\cancel{-a^2}-6a\cancel{-5}\right)+a^2-1=0$$

$$x^2-2ax+a^2-1=0$$

L'equazione è completa e calcoliamo, quindi, il suo discriminante

$$\Delta=4a^2-4\left(a^2-1\right)=4a^2-4a^2+4=4$$

il discriminante è quindi indipendente da a.

se $x \neq -2$ e $a \neq -3$ $a \neq -1$, allora

$$x_{1,2} = \frac{2a \pm 2}{2} = \begin{array}{ll} \nearrow & a-1 \\ \searrow & a+1 \end{array}$$

Esercizio 164. Risolvere la seguente equazione frazionaria a coefficienti letterali frazionari

$$\frac{x-b}{x+b} - \frac{x+2b}{x-2b} = 3$$

Soluzione. L'equazione è frazionaria

$$C.E.: x \neq \pm 2b$$

Osserviamo inoltre che se $b = 0$, l'equazione diviene $1 - 1 = 3$ e quindi risulta impossibile. Il $mcm = (x+b)(x-2b)$

$$(x-b)(x-2b) - (x+2b)(x+b) = 3(x+b)(x-2b)$$

$$\cancel{x^2} - 2bx - bx + \cancel{2b^2} - \cancel{x^2} - bx - 2bx - \cancel{2b^2} = 3x^2 - 6bx + 3bx - 6b^2$$

$$-3x^2 - 3bx + 6b^2 = 0$$

$$x^2 + bx - 2b^2 = 0$$

L'equazione è completa e calcoliamo, quindi, il suo discriminante

$$\Delta = b^2 + 8b^2 = 9b^2$$

se $x \neq \pm 2b$ e $b \neq 0$, allora

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm 3b}{2} = \begin{array}{ll} \nearrow & -2b \\ \searrow & b \end{array}$$

Equazioni parametriche

Esercizio 165. Nell'equazione $x^2 - 2kx + k + 6 = 0$ determina i valori di k tali che

1. le radici siano coincidenti
2. una radice sia nulla
3. una radice sia uguale a 3

Soluzione. 1) Le radici sono coincidenti se l'equazione ha discriminante nullo, per cui

$$\Delta = k^2 - k - 6 = 0$$

risolvendo

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{array}{ll} \nearrow & -2 \\ \searrow & 3 \end{array}$$

2) se una radice è uguale a 0, allora l'equazione è spuria, cioè con termine noto nullo; pertanto

$$k = -6$$

3) se una radice è uguale a 3, allora questa è una soluzione dell'equazione, cioè un valore che sostituito all'incognita verifica l'uguaglianza

$$9 - 6k + k + 6 = 0$$

$$k = 3$$

Esercizio 166. Nell'equazione $2mx^2 - 4mx - 4m - 1 = 0$ determina i valori di m l'equazione ha due soluzioni distinte

Soluzione. Le radici sono distinte se il discriminante è positivo, per cui, applicando la formula ridotta

$$\frac{\Delta}{4} = 4m^2 + 8m^2 + 2m > 0$$

$$6m^2 + m > 0$$

$$m(6m+1) > 0$$

$$m < -\frac{1}{6} \quad \vee \quad m > 0$$

Esercizio 167. Determina per quali valori del parametro reale a l'equazione $3ax^2 - 6ax - 6a - 1 = 0$ non ha soluzioni

Soluzione. Un'equazione non ammette soluzioni reali se il il discriminante è negativo, per cui, applicando la formula ridotta

$$\Delta = 9a^2 + 18a^2 + 3a < 0$$

$$27a^2 + 3a < 0$$

$$3a(9a+1) < 0$$

$$-\frac{1}{9} < a \leq 0$$

[infatti, se $a = 0$, l'equazione risulta $-1 = 0$ e quindi impossibile].

Esercizio 168. Verifica che l'equazione $(a+2)x^2 - 2(a+1)x + a = 0$ ha soluzioni per qualsiasi valore di a. Successivamente determina a in modo che la somma delle radici sia 3.

Soluzione. Calcoliamo il discriminante dell'equazione e osserviamo che è sempre positivo e non dipende dal parametro a.

$$\frac{\Delta}{4} = (a+1)^2 - a(a+2) = \cancel{a^2 + 2a} + 1 \cancel{- a^2 - 2a} \geq 0$$

le soluzioni sono
se $a = -2$, allora $x = 1$
se $a \neq -2$, allora

$$x_{1,2} = \frac{(a+1) \pm 1}{a+2} = \begin{array}{l} \nearrow \quad \dfrac{a}{a+2} \\ \searrow \quad 1 \end{array}$$

La somma delle radici di una generica equazione del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, indicata con s è uguale a $s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$;nel nostro caso

$$-\frac{b}{a} = \frac{2(a+1)}{a+2} = 3$$

e risolvendo rispetto ad a,

$$2a + 2 = 3a + 6 \quad a = -4$$

Esercizio 169. Nell'equazione $kx^2-2(k-1)x-4=0$ determinare il valore del parametro k in modo che

1. una soluzione sia uguale a 2
2. le radici siano opposte
3. il prodotto delle radici sia 4

Soluzione. 1) Se la soluzione è 2, allora tale valore può essere sostituito all'incognita

$$4k-4(k-1)-4=0$$
$$0=0$$

tale condizione è verificata per qualsiasi valore di k, cioè $\forall k \in \mathbb{R}$

2) le equazioni pure, cioè prive del termine con x di primo grado, hanno sempre soluzioni opposte, per cui

$$-4k+4=0 \quad k=1$$

3) il prodotto delle radici è dato da $p=x_1x_2=\dfrac{c}{a}$,per cui

$$\frac{-4}{k}=4$$

$$k=-1$$

Esercizio 170. Nell'equazione $2k^2x^2-3kx+1=0$ determinare il valore del parametro k in modo che

1. una soluzione sia uguale a 0
2. le radici siano reciproche una dell'altra
3. la somma delle radici sia $\frac{1}{2}$

Soluzione. 1) Se la soluzione è 0, allora l'equazione diviene spuria. In questo caso è impossibile, essendo il termine noto, +1, indipendente dal parametro k.

2) le radici reciproche sono tali per cui $x_1=\frac{1}{x_2}$, cioè $x_1x_2=1$, per cui

$$p=\frac{c}{a}=\frac{1}{2k^2}=1$$

cioè

$$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3) la somma delle radici è $s=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$,per cui

$$\frac{3k}{2k^2}=\frac{1}{2}$$

essendo $k\neq 0$, avremo

$$\frac{3}{2k}=\frac{1}{2} \quad k=3$$

Esercizio 171. Nell'equazione $kx^2 - kx + 2k - 1 = 0$ determinare k in modo che

1. le radici siano coincidenti
2. le radici siano reali
3. le radici siano reciproche
4. una radice sia l'antireciproca dell'altra

Soluzione. 1) Le radici sono coincidenti se il discriminante è nullo, per cui

$$\Delta = k^2 - 8k^2 + 4k = 0$$

$$\Delta = -7k^2 + 4k = 0$$

$$k(4 - 7k) = 0$$

poiché k non può essere nullo (l'equazione diventa impossibile), avremo $k = \frac{4}{7}$

2) le radici sono reali se

$$\Delta = k(4 - 7k) \geq 0$$

cioè

$$0 < k \leq \frac{4}{7}$$

3) se le radici sono reciproche

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2k - 1}{k} = 1$$

$$k = 1 \ \textit{impossibile}$$

ma con questo valore non appartiene all'intervallo dei valori di k per il quale esistono soluzioni reali.

4) le soluzioni sono antireciproche, cioè

$$x_1 x_2 = -1$$

da cui

$$\tfrac{2k-1}{k} = -1 \quad k = \frac{1}{3}$$

Esercizio 172. Nell'equazione $x^2 + 2(k-1)x + k^2 + 2k = 0$ determinare k in modo che

1. le radici siano reali e distinte
2. la somma dei reciproci delle radici sia uguale a -4

Soluzione. 1) le radici sono reali e distinte se

$$\frac{\Delta}{4} = (k-1)^2 - k^2 - 2k > 0$$

$$k^2 - 2k + 1 - k^2 - 2k > 0$$

cioè

$$k < \frac{1}{4}$$

2) la somma dei reciproci delle radici è espressa da

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -4$$

$$x_2 + x_1 = -4x_1x_2$$

ma $x_2 + x_1 = -\frac{b}{a}$ e $x_1x_2 = \frac{c}{a}$; in questo caso $a = 1$, per cui $x_2 + x_1 = -b$ e $x_1x_2 = c$

$$-b = -4c$$
$$2k - 2 = 4k^2 + 8k$$
$$4k^2 + 6k + 2 = 0$$
$$2k^2 + 3k + 1 = 0$$

e applicando la formula risolutiva con k incognita, si ha

$$k = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4} = \begin{array}{ll} \nearrow & -1 \\ \searrow & -\frac{1}{2} \end{array}$$

entrambi i valori sono accettabili essendo minori di $\frac{1}{4}$

Esercizio 173. Nell'equazione $ax^2 - 3ax + 1 = 0$ determinare a in modo che

1. le radici siano reali
2. il prodotto delle radici è 10
3. la somma dei quadrati delle radici è 8

Soluzione. 1) le radici sono reali se

$$\Delta = 9a^2 - 4a \geq 0$$
$$a(9a - 4) \geq 0$$

cioè

$$a < 0 \;\; a \geq \frac{4}{9}$$

[se $a = 0$, l'equazione diviene impossibile].

2) Il prodotto delle radici è

$$p = \frac{1}{a} = 10$$

da cui segue che $a = \frac{1}{10}$, valore per cui le radici non sono reali.

2) la somma dei quadrati delle radici è espressa da

$$x_1^2 + x_2^2 = 8$$

ricordando il quadrato di un binomio, riscriviamo

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 8$$

ma $x_2 + x_1 = -\frac{b}{a}$ e $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ e, con $a \neq 0$

$$9 - \frac{2}{a} = 8$$
$$9a - 2 = 8a$$
$$a = 2$$

Esercizio 174. Nell'equazione $kx^2 - 2(k-1)x + k - 2 = 0$ determinare k in modo che

1. le radici siano coincidenti
2. una radice sia 2
3. una radice sia l'opposto del doppio della reciproca dell'altra
4. la somma dei quadrati delle radici è $\frac{10}{9}$

Soluzione. 1) le radici sono coincidenti se il discriminante è nullo

$$\frac{\Delta}{4} = (k-1)^2 - k(k-2) = 0$$

$$\cancel{k^2 - 2k} + 1 \cancel{- k^2 + 2k} = 0 \qquad \textit{impossibile}$$

2) se $x_1 = 2$, allora, sostituendo tale valore alla x, si ha

$$4k - 4(k-1) + k - 2 = 0$$

$$\cancel{4k - 4k} + 4 + k - 2 = 0$$

da cui segue che $k = -2$

3) traduciamo in linguaggio algebrico

$$x_1 = -\frac{2}{x_2} \qquad x_1 x_2 = -2$$

$$\frac{k-2}{k} = -2$$

con $k \neq 0$, si ha $k = \dfrac{2}{3}$

4) la somma dei quadrati delle radici è espressa da

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{10}{9}$$

ricordando il quadrato di un binomio, riscriviamo (sempre con $k \neq 0$)

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \frac{10}{9}$$

$$\left(\frac{2k-2}{k}\right)^2 - \frac{2k-4}{k} = \frac{10}{9}$$

$$\frac{4k^2 - 8k + 4}{k^2} - \frac{2k-4}{k} = \frac{10}{9}$$

$$36k^2 - 72k + 36 - 18k^2 + 36k = 10k^2$$

$$8k^2 - 36k + 36 = 0$$

$$2k^2 - 9k + 9 = 0$$

applicando la formula risolutiva

$$k_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{4} = \begin{array}{l} \nearrow \quad 3 \\ \\ \searrow \quad \frac{3}{2} \end{array}$$

Esercizio 175. Per quale valore di k, semplificando la frazione

$$\frac{x^2-2kx+2k-1}{x^2-4x+3}$$

si ottiene la frazione $\dfrac{x-5}{x-3}$?

Soluzione. Il denominatore si può scomporre in $(x-3)(x-1)$, per cui, per ottenere la frazione indicata, anche il numeratore deve essere divisibile per $x-1$. Ricordando il teorema di Ruffini, se un polinomio è divisibile per $x-1$, allora $P(1)=0$. Dividendo il numeratore per $x-1$ si ottiene, dalla regola di Ruffini

$$x^2-2kx+2k-1=(x-1)(x+1-2k)=0$$

Pertanto

$$x+1-k=x-5$$

cioè

$$k=3$$

Esercizio 176. Considera l'equazione $x^2-(k+1)x-k^2=0$. Dopo aver verificato che ammette soluzioni reali per ogni $k\in\mathbb{R}$, determina per quali valori di k:

1. ammette soluzioni reali la cui somma è 10
2. ammette soluzioni reali reciproche
3. ammette soluzioni reali, tali che una è l'opposto del doppio del reciproco dell'altra
4. ammette soluzioni reale x_1 e x_2 tali che $(x_1+2)(x_2+2)=3$

Soluzione. L'equazione ammette soluzioni reali se il suo $\Delta 0$

$$\Delta=(k+1)^2+4k^2\geq 0$$
$$k^2+2k+1+4k^2\geq 0$$
$$5k^2+2k+1\geq 0$$

risolviamo rispetto a k, osservando che il discriminante di tale equazione è negativo; ciò indica che il polinomio è sempre positivo, quindi la disequazione è vera per ogni valore di k.

1) $x_1+x_2=10$. Avremo

$$-\frac{b}{a}=\frac{k+1}{1}=10$$

cioè

$$k=9$$

2) $x_1=\frac{1}{x_2}$, cioè $x_1x_2=1$, da cui, essendo il coefficiente del termine di 23° grado uguale a 1

$$c=-k^2=1\quad \textit{impossibile}$$

3) $x_1=-\frac{2}{x_2}$, cioè $x_1x_2=1=-2$,

$$-k^2=-2\ \ k=\pm\sqrt{2}$$

4) $(x_1+2)(x_2+2)=3$, svolgendo $x_1x_2+2x_1+2x_2+4=3$, per cui

$$x_1x_2+2(x_1+x_2)+1=0$$
$$-k^2+2(k+1)+1=0$$
$$k^2-2k-3=0$$
$$k=1\pm\sqrt{1+3}=\begin{array}{l}\nearrow\ -1\\ \searrow\ \ 3\end{array}$$

Problemi di secondo grado

Problema 177. Trova l'età di una persona, sapendo che fra due anni la sua età sarà uguale al quadrato della quarta parte dell'età che aveva tre anni fa.

Soluzione. È necessaria la corretta interpretazione del testo e la sua traduzione nel linguaggio algebrico. Indichiamo con x, (con $x > 0$) l'età della persona.

$$x+2 = \left(\frac{x-3}{4}\right)^2$$

Risolviamo

$$x+2 = \tfrac{x^2-6x+9}{16} \quad 16x+32 = x^2-6x+9$$

$$x^2-22x-23 = 0$$

applichiamo la formula ridotta

$$x = 11 \pm \sqrt{121+23} = \begin{array}{l} \nearrow \quad -1 \\ \searrow \quad 23 \end{array}$$

l'età richiesta sarà pertanto di 23 anni. L'altra soluzione algebrica non è applicabile al problema.

Problema 178. Utilizzando $240\,m$ di filo spinato si vuole recintare un appezzamento di terreno, di forma rettangolare, della superficie di$3200\,m^2$. Quali dimensioni dovrà avere tale appezzamento?

Soluzione. La lunghezza del recinto è uguale al perimetro del rettangolo. La somma di due lati sarà uguale a $120\,m$. L'area di un rettangolo è espressa dal prodotto della sua base per l'altezza, cioè dai due lati. Abbiamo quindi due informazioni che riguardano i due lati, la loro somma e il loro prodotto; è possibile quindi applicare quanto visto per le proprietà delle soluzioni di una equazione di secondo grado

$$x_1+x_2 = 120 \qquad x_1x_2 = 3200$$

L'equazione da risolvere è pertanto

$$x^2+120x+3200 = 0$$

applichiamo la formula ridotta

$$x = 60 \pm \sqrt{3600-3200} = \begin{array}{l} \nearrow \quad 40 \\ \searrow \quad 80 \end{array}$$

Le due dimensioni dell'appezzamento sono $x_1 = 40\,m$ e $x_2 = 80\,m$.

Problema 179. Un negoziante con 720 euro si riprometteva di acquistare un certo numero di magliette, ma, poiché ogni maglietta è costata 4 euro in più, ne ha dovute acquistare 6 in meno. Quante magliette ha comprato?

Soluzione. Se poniamo con x il numero iniziale delle magliette, si ha che, inizialmente, ogni maglietta aveva un costo di $\frac{720}{x}$. Successivamente ogni maglietta ha un costo di $\left(\frac{720}{x}+4\right)$ e il numero delle magliette iniziali diminuisce di 6, per mantenere una spesa totale di 720 euro. Pertanto, il costo di una maglietta per il numero di magliette acquistate è dato da

$$\left(\frac{720}{x}+4\right)(x-6) = 720$$

$$\cancel{720} - \frac{4320}{x} + 4x - 24 = \cancel{720}$$

con $x \neq 0$, si ha

$$x^2 - 6x - 1080 = 0$$

$$x = 3 \pm \sqrt{9 + 1080} = \begin{array}{l} \nearrow \quad 36 \\ \searrow \quad -30 \end{array}$$

L'unica soluzione numerica del problema è quella positiva. Se il numero iniziale delle magliette era 36, togliendone 6 si ottiene il loro numero finale, cioè 30.

Problema 180. Due automobili partono contemporaneamente per un viaggio di 360 km, che percorrono a velocità costante. La prima automobile, che viaggia a una velocità superiore di 10 km/h a quella della seconda, arriva mezz'ora prima. Determina la velocità delle due automobili.

Soluzione. Il moto delle due automobili è descrivibile fisicamente come un moto rettilineo uniforme, con diverse velocità. La legge oraria che descrive tale moto è, supponendo una partenza da fermo,

$$s = vt$$

In questo caso $s = 360\,km$. Detta x la velocità della prima auto, quella della seconda sarà $x + 10$. La differenza tra i tempi di percorrenza è uguale a $0,5$ ore. Dalla legge oraria si ricava che il tempo di percorrenza è uguale a

$$t = \frac{s}{v}$$

pertanto, misurando la velocità in km/h e il tempo in ore,

$$\frac{360}{x} - \frac{360}{x+10} = \frac{1}{2}$$

$$720\,(x+10) - 720x = x\,(x+10)$$

$$x^2 + 10x - 7200 = 0$$

$$x = -5 \pm \sqrt{25 + 7200} = -5 \pm 85$$

e considerando la sola soluzione positiva, si ha

$$v_1 = 80\,\frac{km}{h} \quad v_2 = 90\,\frac{km}{h}$$

Problema 181. Un corpo viene lanciato verso l'alto a una velocità di 10 m/s. Dopo quanto tempo raggiunge un'altezza di 7 m?

Soluzione. La descrizione di questo moto è identica, trascurando qualunque attrito, a quella della caduta libera, con la ovvia differenza che la velocità di partenza si riduce salendo fino ad annullarsi, dopo di che il corpo ricade, riacquistando alla fine la stessa velocità di partenza. Il moto è pertanto uniformemente decelerato

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Sostituendo i valori assegnati ed considerando come incognita il tempo t

$$\frac{1}{2} g t^2 - v_0 t + s = 0$$

$$4,9t^2 - 10t + 7 = 0$$

applicando la formula risolutiva

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 34,3}}{4,9}$$

si può vedere che il discriminante risulta negativo, per cui il corpo non raggiungerà mai l'altezza indicata.

Problema 182. Una pietra viene lasciata cadere in un burrone. Quanti secondi impiega la pietra a toccare il fondo del burrone, se il rumore dell'urto viene percepito dopo 9 s? Quanto è profondo il burrone? (Velocità del suono in aria: $\simeq 340$ m/s; accelerazione di gravità: $g \simeq 9{,}8$ m/s .)

Soluzione. La caduta della pietra è descrivibile con un moto uniformemente accelerato del tipo

$$s = \frac{1}{2}gt_1^2$$

il suono per essere percepito, percorre la stessa distanza con un moto rettilineo uniforme del tipo

$$s = vt_2$$

ma $t_2 = 9 - t_1$, per cui

$$\frac{1}{2}gt_1^2 = v(9 - t_1)$$

Sostituendo i valori assegnati ed considerando come incognita il tempo t

$$4{,}9t^2 + 340t - 3060 = 0$$

applicando la formula risolutiva ridotta e considerando solo la radice positiva

$$t \simeq \frac{-170 + \sqrt{28900 + 14994}}{4{,}9} \simeq \frac{-170 + 209}{4{,}9} \simeq 8{,}06\,s$$

Il suono impiega pertanto $\simeq 0{,}94\,s$ e la distanza percorsa sarà

$$s \simeq 340 \times 0{,}94 \simeq 320\,m$$

Problema 183. Un uomo di massa m (in kg), praticante di salto con l'elastico, si lascia cadere (con velocità iniziale nulla) da un ponte di altezza h (in metri) rispetto al fiume che scorre sotto il ponte. Allo stato di riposo la corda elastica ha una lunghezza di L (in metri) e la sua costante elastica è $k\,\mathrm{N/m}$. Trascurando gli attriti, verifica che l'allungamento d (in metri) della fune nel punto più basso raggiunto è espresso dalla formula:

$$d = \frac{mg}{k} + \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{2mgL}{k}}$$

essendo g l'accelerazione di gravità.

Soluzione. Le forze sono tutte conservative, per cui la variazione di energia meccanica è nulla, cioè $\Delta K + \Delta U_{caduta} + \Delta U_{molla} = 0$ ($\Delta K = 0$, perché la $v_i = v_f$, quando la corda ha subito il massimo allungamento l'uomo ha velocità nulla). Ora $\Delta U = mg(L+d)$ e $\Delta U_{molla} = -\frac{1}{2}kd^2$. Avremo quindi

$$mg(L+d) - \frac{1}{2}kd^2 = 0$$

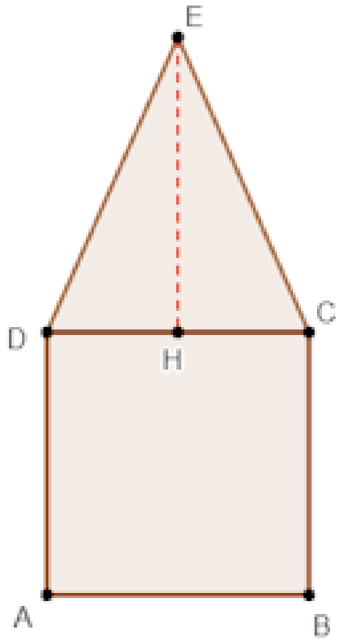
svolgendo

$$kd^2 - 2mgd - 2mgL = 0$$

e risolvendo rispetto a d (considerando solo la somma)

$$d = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + 2kmgL}}{k} = \frac{mg}{k} + \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{2mgL}{k}}$$

Problema 184. Un pentagono è formato da un quadrato e da un triangolo isoscele avente per base un lato del quadrato. L'altezza del triangolo è $\frac{6}{5}$ del lato di base e l'area del pentagono è di $640\,cm^2$. Trovare il perimetro del pentagono.



Soluzione. L'area del poligono è uguale alla somma dell'area del quadrato e del triangolo isoscele. Il perimetro è uguale alla somma di tre lati del quadrato più i due lati obliqui del triangolo. Il lato obliquo è ottenibile applicando il teorema di Pitagora al triangolo DHE, dove H è il punto medio del lato CD.

Scriviamo la formula per ottenere l'area del pentagono

$$A = \overline{AB}^2 + \frac{\overline{CD} \times \overline{EH}}{2}$$

Ora, $CD = AB$ e $EH = \frac{6}{5}AB$. Poniamo quindi la lunghezza del lato $AB = x$.

$$640 = x^2 + \frac{\frac{6}{5}x^2}{2}$$

$$640 = x^2 + \frac{3}{5}x^2 = \frac{8}{5}x^2$$

l'equazione è pura e consideriamo solo il valore positivo (essendo una lunghezza)

$$x = \sqrt{\frac{640 \times 5}{8}} = 20$$

Il lato del quadrato è quindi $AB = 20\,cm$ e l'altezza del triangolo $EH = 24\,cm$.

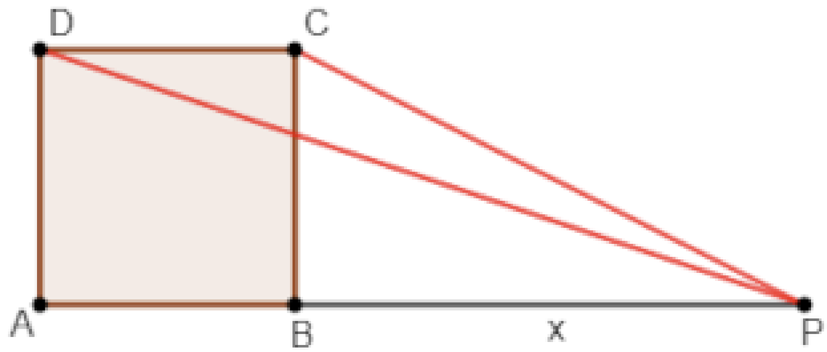
Troviamo la lunghezza del lato obliquo del triangolo isoscele:

$$CE = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26\,cm$$

Il perimetro del pentagono è:

$$2p = 20 \times 3 + 26 \times 2 = 112\,cm$$

Problema 185. Dato un quadrato ABCD, di lato a, considera un punto P sul prolungamento di AB dalla parte di B. Determina $\overline{BP} = x$ in modo che risulti $\overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = 15a^2$.



Soluzione. Troviamo i due segmenti con il teorema di Pitagora applicato ai triangoli PBC e PAD

$$PC^2 = BC^2 + BP^2 = a^2 + x^2$$
$$PD^2 = AP^2 + AD^2 = a^2 + (a+x)^2$$

la relazione indicata è quindi

$$a^2 + x^2 + a^2 + a^2 + 2ax + x^2 = 15a^2$$

$$x^2 + ax - 6a^2 = 0$$

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 24a^2}}{2} = \frac{-a \pm 5a}{2} = \begin{matrix} \nearrow & -3a \\ \searrow & 2a\, accett. \end{matrix}$$

Problema 186. Un triangolo rettangolo, in cui un cateto è $\frac{2}{3}$ dell'altro, è equivalente alla differenza tra il quadrato dell'ipotenusa e il rettangolo avente una dimensione di 20 cm e l'altra doppia del cateto maggiore del triangolo. Determina i cateti.

Soluzione. Poniamo la misura del cateto maggiore uguale a x; il cateto minore sarà espresso da $\frac{2}{3}x$. Il quadrato dell'ipotenusa sarà $x^2 + \frac{4}{9}x^2 = \frac{13}{9}x^2$. Traduciamo quanto indicato in linguaggio algebrico (dal termine equivalente si estrapola l'uguaglianza delle aree). L'area del triangolo è il semi prodotto dei due cateti

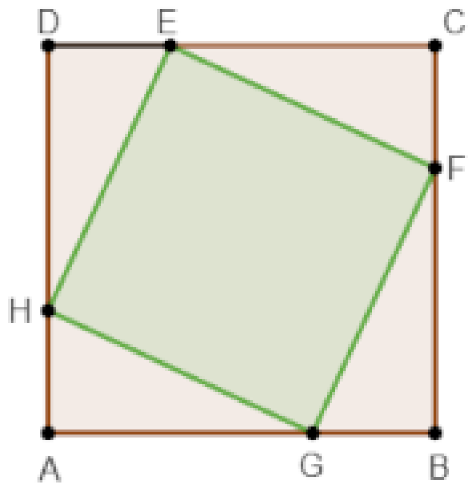
$$\frac{1}{3}x^2 = \frac{13}{9}x^2 - 20 \cdot 2x$$
$$\frac{10}{9}x^2 - 40x = 0$$

L'equazione è spuria e trascurando la soluzione nulla, abbiamo

$$\frac{10}{9}x = 40$$
$$x = 36$$

La lunghezza del cateto maggiore è $36\,cm$ e del cateto minore $24\,cm$

Problema 187. Il quadrato ABCD ha il lato di 9 cm. Sui suoi lati prendere, a partire dai vertici e procedendo sempre in senso orario, quattro segmenti congruenti AE, BF, CG, DH (vedi figura). Quale deve essere la lunghezza di tali segmenti se si vuole che l'area del quadrato inscritto EFGH sia di $45\,cm^2$?



Soluzione. Poniamo con x il segmento DE e tutti quelli ad esso uguali in lunghezza. Se il lato quadrato ABCD e se $DE = x$, allora $EC = 9 - x$. Il poligono inscritto è un quadrato di cui troviamo il lato con il teorema di Pitagora

$$EF = \sqrt{(9-x)^2 + x^2}$$

Calcoliamo in funzione di x l'area del quadrato inscritto e uguagliamola al valore dato

$$(9-x)^2 + x^2 = 45$$

$$81 - 18x + x^2 + x^2 = 45$$

$$2x^2 - 18x + 36 = 0$$

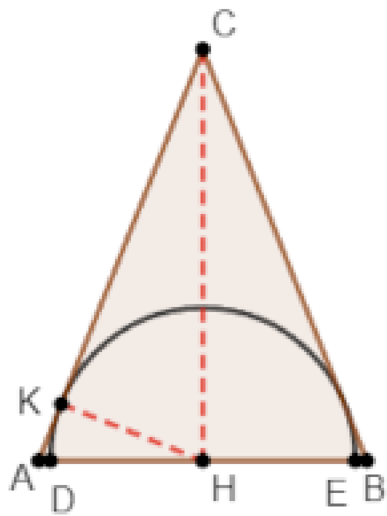
$$x^2 - 9x + 18 = 0$$

applichiamo la formula risolutiva

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2}$$

Avremo che la lunghezza del segmento DE è $3\,cm$ e quella del segmento EC è $6\,cm$.

Problema 188. Il triangolo isoscele ABC è circoscritto a una semicirconferenza di diametro $16a$. Sapendo che i lati obliqui del triangolo sono lunghi $20a$, determinare la misura della base AB.



Soluzione. Sappiamo che $DE = 16a$ e che $AC = BC = 20a$. Poniamo la metà della base uguale a x, cioè $AH = x$. Troviamo l'altezza CH

$$CH = \sqrt{400a^2 - x^2}$$

Troviamo ora il raggio, della semicirconferenza HK, di cui conosciamo la lunghezza ($8a$), in funzione di x, osservando che è l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo AHC. Da

$$AC \cdot KH = AH \cdot HC$$

si ha

$$DH = KH = \frac{x\sqrt{400a^2 - x^2}}{20a} = 8a$$

$$x\sqrt{400a^2 - x^2} = 160a^2$$

avremo la condizione $x^2 \leq 400a^2$, cioè $0 < x < 20a$

$$x^2\left(400a^2 - x^2\right) = 25600a^4$$

$$x^4 - 400a^2x^2 + 25600a^4 = 0$$

applichiamo la formula risolutiva

$$x^2 = 200a^2 \pm \sqrt{40000a^4 - 25600a^4} = 200a^2 \pm 120a^2 = \begin{array}{l} \nearrow \quad 80a^2 \\ \searrow \quad 320a^2 \end{array}$$

da cui

$$\begin{array}{ll} x^2 = 80a^2 & x = 4a\sqrt{5} \\ x^2 = 320a^2 & x = 8a\sqrt{5} \end{array}$$

La base del triangolo è il doppio di quanto trovato, per cui abbiamo due possibili soluzioni

$$AB = 8a\sqrt{5} \qquad AB = 16a\sqrt{5}$$

Equazioni di grado superiore al secondo

Equazioni trinomie

Esercizio 189. Risolvi $x^6+9x^3+8=0$

Soluzione. La risoluzione passa attraverso un cambiamento di variabile ottenibile ponendo $x^3=y$; si avrà un'equazione di secondo grado nella nuova variabile

$$y^2+9y+8=0$$

applichiamo la formula risolutiva per l'incognita y

$$y_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{81-32}}{2}=\frac{-9\pm 7}{2}=\begin{array}{ll}\nearrow & -8\\ \searrow & -1\end{array}$$

troviamo ora le soluzioni in x, sapendo che $y=x^3$;

$$\begin{array}{ll}x^3=-8 & x=-2\\ x^3=-1 & x=-1\end{array}$$

Equazioni biquadratiche

Esercizio 190. Risolvi $2\sqrt{2}x^4-10x^2-6\sqrt{2}=0$

Soluzione. La risoluzione passa ancora attraverso un cambiamento di variabile ottenibile ponendo $x^2=y$; si avrà un'equazione di secondo grado nella nuova variabile

$$2\sqrt{2}y^2-10y-6\sqrt{2}=0$$

applichiamo la formula risolutiva ridotta per l'incognita y

$$y_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{2\sqrt{2}}=\frac{5\pm 7}{2\sqrt{2}}=\begin{array}{ll}\nearrow & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \searrow & \frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}\end{array}$$

troviamo ora le soluzioni in x, sapendo che $y=x^2$;

$$\begin{array}{ll}x^2=-\frac{1}{\sqrt{2}} & \quad imposs\\ x^2=3\sqrt{2} & x=\pm\sqrt{3\sqrt{2}}=\pm\sqrt[4]{18}\end{array}$$

Equazioni risolvibili mediante sostituzione

Esercizio 191. Risolvi $\left(x^3+2\right)^2=4$

Soluzione. La risoluzione passa ancora attraverso un cambiamento di variabile ottenibile ponendo $x^3=y$; si avrà un'equazione di secondo grado nella nuova variabile

$$(y+2)^2=4$$

$$y^2+4y=0 \quad y\,(y+4)=0$$

applichiamo la legge dell'annullamento del prodotto, si ha

$$y=0 \quad y=-4$$

troviamo ora le soluzioni in x, sapendo che $y=x^3$;

$$\begin{array}{ll} x^3=0 & x=0 \\ x^3=-4 & x=-\sqrt[3]{4} \end{array}$$

Esercizio 192. Risolvi $\sqrt{3}\left(x^3+\sqrt{3}\right)^3=9$

Soluzione. Questa volta poniamo $x^3+\sqrt{3}=y$; si avrà

$$\sqrt{3}y^3=9$$

$$y^3=\frac{9}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$$

$$y=\sqrt[3]{3\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\sqrt{27}}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt{3}$$

troviamo ora le soluzioni in x, sapendo che $y=x^3+\sqrt{3}$;

$$x^3+\sqrt{3}=\sqrt{3} \quad x_{1,2,3}=0$$

Esercizio 193. Risolvi $\left(x^2+2\right)^2-9\left(x^2+2\right)+18=0$

Soluzione. Questa volta poniamo $x^2+2=y$; si avrà

$$y^2-9y+18=0$$

$$y=\frac{9\pm\sqrt{81-72}}{2}= \begin{array}{ll} \nearrow & 3 \\ \searrow & 6 \end{array}$$

troviamo ora le soluzioni in x, sapendo che $y=x^2+2$;

$$\begin{array}{ll} x^2+2=3 & x_{1,2}=\pm 1 \\ x^2+2=6 & x_{3,4}=\pm 2 \end{array}$$

Esercizio 194. Risolvi

$$\left(\frac{x+2}{3x-1}\right)^2-5\frac{x+2}{3x-1}+6=0$$

Soluzione. Poniamo $\frac{x+2}{3x-1}=y$ (termine ripetuto) con la condizione che $x\neq\frac{1}{3}$; si avrà

$$y^2-5y+6=0$$

ricordando le proprietà della somma e prodotto delle soluzioni si ha

$$y=\begin{array}{l}\nearrow\ 3\\ \searrow\ 2\end{array}$$

troviamo ora le soluzioni in x, sapendo che $y=\frac{x+2}{3x-1}$;

$$\begin{array}{lll}\frac{x+2}{3x-1}=3 & x+2=9x-3 & x=\frac{5}{8}\\ \frac{x+2}{3x-1}=2 & x+2=6x-2 & x=\frac{4}{5}\end{array}$$

Esercizio 195. Risolvi

$$x^3-3x^2+2x=0$$

Soluzione. Questa equazione di terzo è rappresentata da un polinomio privo del termine noto; è possibile quindi raccogliere a fattor comune

$$x\left(x^2-3x+2\right)=0$$

e applicando la legge dell'annullamento del prodotto si ha

$$x_1=0$$

Risolviamo ora il secondo fattore con la formula risolutiva

$$x_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\begin{array}{l}\nearrow\ 1\\ \searrow\ 2\end{array}$$

Esercizio 196. Risolvi

$$x^3-x^2+x-1=0$$

Soluzione. Applichiamo il procedimento del raccoglimento parziale

$$x^2(x-1)+1(x-1)=0$$

$$\left(x^2+1\right)(x-1)=0$$

e applicando la legge dell'annullamento del prodotto si ha

$$x^2+1=0 \qquad \textit{impossibile}$$

$$x=1$$

Esercizio 197. Risolvi

$$2x^3-7x^2+3x=0$$

Soluzione. Questa equazione di terzo è rappresentata da un polinomio privo del termine noto; è possibile quindi raccogliere a fattor comune

$$x\left(2x^2-7x+3\right)=0$$

e applicando la legge dell'annullamento del prodotto si ha

$$x_1=0$$

Risolviamo ora il secondo fattore con la formula risolutiva

$$x_{2,3}=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{4}= \begin{array}{l} \nearrow \quad \frac{1}{2} \\ \searrow \quad 3 \end{array}$$

Esercizio 198. Risolvi

$$x^4-2x^3-27x+54=0$$

Soluzione. Applichiamo il procedimento del raccoglimento parziale

$$x^3(x-2)-27(x-2)=0$$

$$\left(x^3-27\right)(x-2)=0$$

e applicando la legge dell'annullamento del prodotto si ha

$$x^3-27=0 \quad x_1=3$$

$$x=2$$

Esercizio 199. Risolvi

$$x^3+2x^2-5x-6=0$$

Soluzione. In questo caso il polinomio si scompone applicando il teorema e la regola di Ruffini. Cerchiamo i numeri da sostituire alla x tra i divisori del termine noto, cioè $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$;

$$\begin{array}{c} P(1)=1+2-5-6\neq0 \\ P(-1)=-1+2+5-6=0 \end{array}$$

e dividendo con la regola di Ruffini, otteniamo

$$(x+1)\left(x^2+x-6\right)=0$$

e applicando la legge dell'annullamento del prodotto si ha

$$x+1=0 \quad x_1=-1$$

e ricordando le proprietà delle soluzioni

$$x_2=-3 \qquad x_3=2$$

Esercizio 200. Risolvi
$$2x^4+3x^3-4x^2-3x+2=0$$

Soluzione. In questo caso il polinomio si scompone applicando il teorema e la regola di Ruffini. Cerchiamo i numeri da sostituire alla x tra i divisori del termine noto, cioè $\pm1, \pm2$;

$$P(1)=2+3-4-3+2=0$$
$$P(-1)=2-3-4+3+2=0$$

e dividendo con la regola di Ruffini, otteniamo

$$(x-1)(x+1)\left(2x^2+3x-2\right)=0$$

e applicando la legge dell'annullamento del prodotto si ha

$$x+1=0 \quad x_1=-1$$

$$x-1=0 \quad x_2=1$$

e applicando la formula risolutiva

$$x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\begin{array}{l}\nearrow \quad -2\\ \searrow \quad \frac{1}{2}\end{array}$$

Esercizio 201. Risolvi
$$16\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^8-17\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^4+1=0$$

Soluzione. Poniamo $\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^4=y$ (termine ripetuto);

$$16y^2-17y+1=0$$

applicando la formula risolutiva

$$y=\frac{17\pm\sqrt{289-64}}{32}=\frac{17\pm15}{32}\begin{array}{l}\nearrow \quad \frac{1}{16}\\ \searrow \quad 1\end{array}$$

troviamo ora le soluzioni in x

$$\begin{array}{ccc} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^4=\frac{1}{16} & \frac{x^2-1}{x^2+1}=\pm\frac{1}{2} & \begin{array}{cc} 2x^2-2=x^2+1 & x=\pm\sqrt{3}\\ 2x^2-2=-x^2-1 & x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\\ \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^4=1 & \frac{x^2-1}{x^2+1}=\pm1 & \begin{array}{cc} x^2-1=x^2+1 & \textit{imposs}\\ x^2-1=-x^2-1 & x=0\end{array}\end{array}$$

Esercizio 202. Risolvi
$$\frac{3}{x^2-1}+\frac{2x^2}{x^2+3}=\frac{10}{x^4+2x^2-3}$$

Soluzione. Scomponiamo i denominatori per determinare le C.E e il *mcm*. Il denominatore al secondo può essere scomposto osservando che è il prodotto dei due denominatori al primo membro

$$\frac{3}{(x-1)(x+1)}+\frac{2x^2}{x^2+3}=\frac{10}{(x-1)(x+1)(x^2+3)}$$

$$3\left(x^2+3\right)+2x^2\left(x^2-1\right)=10$$

$$3x^2+9+2x^4-2x^2-10=0$$

si ha un'equazione biquadratica

$$2x^4+x^2-1=0$$

applicando la formula risolutiva, considerando x^2 come incognita

$$x^2=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\begin{array}{cc}\nearrow & -1\\ \searrow & \frac{1}{2}\end{array}$$

troviamo ora le soluzioni in x

$$\begin{array}{ll} x^2=-1 & impossib. \\ x^2=\frac{1}{2} & x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}$$

Esercizio 203. Risolvi

$$\left(x^2+x-6\right)^4+\left(x^2-7x+10\right)^2=0$$

Soluzione. In casi come questi invece di applicare la scomposizione mediante il trinomio di Newton, si osserva che entrambi i polinomi tra parentesi sono elevati a potenze pari e che, pertanto, risulteranno sempre positivi. Ciò implica che la loro somma può essere uguale a zero solo quando i due polinomi sono uguali a zero. Pertanto

$$x^2+x-6=0$$

applicando le proprietà delle soluzioni si ha $x_1=-3$ e $x_2=2$ e

$$x^2-7x+10=0$$

$$x_3=5 \quad x_4=2$$

dovendo essere contemporaneamente uguali a zero, l'unica soluzione comune è

$$x=2$$

Equazioni irrazionali

Dominio delle equazioni

Esercizio 204. Determina il dominio della seguente equazione irrazionale

$$\sqrt{4-x}+x=3$$

Soluzione. È necessario determinare il dominio per individuare l'intervallo dei valori che rende la radice non negativa. In questo caso

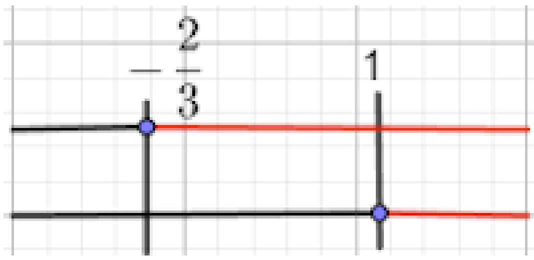
$$4-x\geq 0 \quad x\leq 4$$

Esercizio 205. Determina il dominio della seguente equazione irrazionale

$$\sqrt{2+3x}-\sqrt{x-1}+3-x^2=0$$

Soluzione. Le radici sono due e quindi il dominio è l'intersezione dei due intervalli

$$\begin{cases} 2+3x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -\frac{2}{3} \\ x \geq 1 \end{cases}$$



L'intervallo in cui entrambe le disequazioni sono verificate è $x \geq 1$.

Esercizio 206. Determina il dominio della seguente equazione irrazionale

$$\sqrt{\frac{x-1}{x-3}}+\sqrt{6-x}=17$$

Soluzione. Le radici sono due e quindi il dominio è l'intersezione dei due intervalli

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x-3} \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \quad x-1 \geq 0 \\ \quad x-3 > 0 \\ x \neq 3 \\ x \leq 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 1 \ \vee \ x > 3 \\ x \neq 3 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

Dominio: $x \leq 1 \ 3 < x \leq 6$.

Esercizio 207. Risolvere la seguente equazione dopo aver determinato il suo dominio

$$\sqrt{4-x^2}-\sqrt{x^2-81}-x=0$$

Soluzione. Il dominio è dato da

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x^2-81 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \leq -9 \ \ x \geq 9 \end{cases}$$

Dominio: insieme vuoto; $D: \emptyset$; la soluzione è quindi impossibile.

Esercizio 208. Risolvere la seguente equazione dopo aver determinato il suo dominio

$$\sqrt{x-3}=\sqrt{1-x}$$

Soluzione. Il dominio è dato da

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

Dominio: insieme vuoto; $D:\emptyset$; la soluzione è quindi impossibile.

Esercizio 209. Risolvere la seguente equazione dopo aver determinato il suo dominio

$$3x-\sqrt{1-4x^2}=1$$

Soluzione. Il dominio è dato da

$$1-4x^2\geq 0\quad -\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{1}{2}$$

Isoliamo la radice portandola al secondo membro

$$3x-1=\sqrt{1-4x^2}$$

Nel dominio il secondo membro è positivo o nullo, pertanto, affinché l'uguaglianza sia verificata, anche il primo membro dovrà essere positivo o nullo, cioè $x\geq \frac{1}{3}$.

I valori accettabili come soluzioni apparterranno quindi all'intervallo $\frac{1}{3}\leq x\leq \frac{1}{2}$.

Eleviamo al quadrato

$$9x^2-6x+1=1-4x^2$$

$$13x^2-6x=0\quad x(13x-6)=0$$

$$x=0\ \textit{non accettabile}\quad x=\frac{6}{13}$$

Esercizio 210. Risolvere la seguente equazione dopo aver determinato il suo dominio

$$\sqrt{2x+1}=\sqrt{4-x}$$

Soluzione. Il dominio è dato da

$$\begin{cases}2x+1\geq 0\\ 4-x\geq 0\end{cases}\qquad \begin{cases}x\geq -\frac{1}{2}\\ x\leq 4\end{cases}$$

$$D:-\frac{1}{2}\leq x\leq 4$$

Eleviamo al quadrato

$$2x+1=4-x$$

$$3x=3$$

$$x=1$$

Esercizio 211. Risolvere la seguente equazione dopo aver determinato il suo dominio

$$3\sqrt{x+3}-4x=-15$$

Soluzione. Il dominio è dato da

$$D:x\geq -3$$

Isoliamo la radice

$$3\sqrt{x+3}=4x-15$$

Poiché il primo membro è sempre non positivo o nullo nel dominio indicato, così dovrà essere anche per il secondo membro, cioè $x\geq\frac{15}{4}$. Le soluzioni dovranno appartenere all'intervallo

$$x\geq\frac{15}{4}$$

Eleviamo al quadrato

$$9x+27=16x^2-120x+225$$

$$16x^2-129x+198=0$$

applichiamo la formula risolutiva

$$x=\frac{129\pm\sqrt{16641-12672}}{32}=\frac{129\pm 63}{32}\begin{array}{l}\nearrow\ \frac{33}{16}\ non\, accett.\\ \searrow\ 6\end{array}$$

Esercizio 212. Risolvere la seguente equazione dopo aver determinato il suo dominio

$$\sqrt{x^4+x^2-2}=x^2$$

Soluzione. Il dominio è dato da

$$x^4+x^2-2\geq 0$$

disequazione associata biquadratica

$$y^2+y-2\geq 0$$

$$y\leq -2\ \vee\ y\geq 1$$

le soluzioni in x ($x^2\leq -2$, per nessun valore di x), per cui

$$x^2\geq 1\quad x\leq -1\ \vee\ x\geq 1$$

$$D: x\leq -1\ \vee\ x\geq 1$$

Entrambi i membri sono sempre positivi o nulli

$$\cancel{x^4}+x^2-2=\cancel{x^4}$$

$$x=\pm\sqrt{2}$$

Esercizio 213. Risolvere la seguente equazione dopo aver determinato il suo dominio

$$2x-5\sqrt{x}+2=0$$

Soluzione. Il dominio è dato da

$$x\geq 0$$

Osserviamo che i gradi dell'equazione sono uno doppio dell'altro, per cui possiamo introdurre la sostituzione $t=\sqrt{x}$

$$2t^2-5t+2=0$$

$$t=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}\begin{array}{l}\nearrow\ \frac{1}{2}\\ \searrow\ 2\end{array}$$

le soluzioni in x sono

$$\begin{array}{ll}\sqrt{x}=\frac{1}{2} & x=\frac{1}{4}\\ \sqrt{x}=2 & x=4\end{array}$$

Esercizio 214. Risolvere la seguente equazione dopo aver determinato il suo dominio

$$\sqrt{x+8}-\sqrt{x}=2$$

Soluzione. Il dominio è dato da

$$\begin{cases} x+8 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -8 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$D: x \geq 0$$

Isoliamo una radice ed eleviamo al quadrato

$$\sqrt{x+8}=2+\sqrt{x}$$

$$x+8=4+x+4\sqrt{x}$$

$$1=\sqrt{x}$$

Ora, entrambi i membri sono non negativi; eleviamo nuovamente al quadrato

$$x=1$$

Esercizio 215. Risolvere la seguente equazione dopo aver determinato il suo dominio

$$\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{4-x}=x-3$$

Soluzione. Il dominio è dato da

$$\begin{cases} x^2+x+1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x \leq 4 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$D: 3 \leq x \leq 4$$

Isoliamo una radice ed eleviamo al quadrato

$$\sqrt{x^2+x+1}=-\sqrt{4-x}+(x-3)$$

$$\cancel{x^2}+x+1=\cancel{x^2}-6x+9+4-x-2(x-3)\sqrt{4-x}$$

$$4x-6=-(x-3)\sqrt{4-x}$$

eleviamo nuovamente al quadrato

$$16x^2-48x+36=\left(x^2-6x+9\right)(4-x)$$

$$16x^2-48x+\cancel{36}=4x^2-x^3-24x+6x^2+\cancel{36}-9x$$

$$x^3+6x^2-15x=0$$

raccogliamo a fattor comune e applichiamo la legge dell'annullamento del prodotto

$$x\left(x^2+6x-15\right)=0$$

Ora, $x=0$ non è accettabile; e

$$x=-3\pm\sqrt{9+15}$$

entrambe le soluzioni non appartengono al dominio per cui l'equazione risulta impossibile.

Esercizio 216. Risolvere la seguente equazione dopo aver determinato il suo dominio

$$2\sqrt{x-5}-\frac{5(7+x)}{\sqrt{x-5}}+3\sqrt{2x}=0$$

Soluzione. Il dominio è dato da

$$\begin{cases} x-5\geq 0 \\ x-5>0 \\ x\geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>5 \\ x\geq 0 \end{cases}$$

$$D: x\geq 5$$

moltiplichiamo per il mcm

$$2x-10-35-5x+3\sqrt{2x^2-10x}=0$$

isoliamo la radice ed eleviamo al quadrato

$$-3x-45=-3\sqrt{2x^2-10x}$$

$$x+15=\sqrt{2x^2-10x}$$

$$x^2+30x+225=2x^2-10x$$

$$x^2-40x-225=0$$

$$x=20\pm\sqrt{400+225}=20\pm 25$$

per cui $x=-5$ non accettabile; la soluzione è $x=45$.

Esercizio 217. Risolvere la seguente equazione dopo aver determinato il suo dominio

$$\frac{1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}+\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}=1$$

Soluzione. Il dominio è dato da

$$\begin{cases} 2+x\geq 0 \\ 2-x\geq 0 \\ \sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\neq 0 \\ \sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\geq -2 \\ x\leq 2 \\ 2+x\neq 2-x \\ 2+x\neq 2-x \end{cases} \qquad \begin{cases} x\geq -2 \\ x\leq 2 \\ x\neq 0 \\ \forall x \end{cases}$$

$$D: -2\leq x<0 \,\vee\, 0<x\leq 2$$

moltiplichiamo per il mcm tenendo che $\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)=2+x-2+x$, cioè una differenza di due quadrati

$$\sqrt{2+x}\cancel{+\sqrt{2-x}}+\sqrt{2+x}\cancel{-\sqrt{2-x}}=2+x-2+x$$

eleviamo al quadrato e dividiamo per 2

$$2\sqrt{2+x}=2x$$

il primo membro è positivo o nullo nel dominio, per cui lo dovrà essere anche il secondo membro, cioè $x\geq 0$, pertanto l'intervallo delle soluzioni sarà $0<x\leq 2$

$$2+x=x^2$$

$$x^2-x-2=0$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}\begin{array}{l}\nearrow\; -1\; non\, accettabile \\ \searrow\; 2\end{array}$$

Esercizio 218. Risolvere la seguente equazione dopo aver determinato il suo dominio

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{4x+9}}=\frac{9}{\sqrt{16x^2+36x}}$$

Soluzione. Il dominio è dato da

$$\begin{cases} x>0 \\ 4x+9>0 \\ 16x^2+36x>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>0 \\ x>-\frac{9}{4} \\ 4x(4x+9)>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>0 \\ x>-\frac{9}{4} \\ x<-\frac{9}{4} \vee x>0 \end{cases}$$

$$D: x>0$$

moltiplichiamo per il mcm tenendo che $\sqrt{16x^2+36x}\sqrt{4x(4x+9)}=2\sqrt{x(4x+9)}$,

$$\sqrt{4x+9}+2\sqrt{x}=9$$

eleviamo al quadrato

$$4x+9+4x+4\sqrt{4x^2+9x}=81$$
$$4\sqrt{4x^2+9x}=72-8x$$
$$\sqrt{4x^2+9x}=18-2x$$

il primo membro è positivo o nullo nel dominio, per cui lo dovrà essere anche il secondo membro, cioè

$$18-2x\geq 0 \qquad x\leq 9$$

pertanto l'intervallo delle soluzioni sarà $0<x\leq 9$

$$4x^2+9x=324+4x^2-72x$$
$$81x=324$$
$$x=4$$

Esercizio 219. Risolvere la seguente equazione dopo aver determinato il suo dominio

$$\frac{2\sqrt{4+x}-2}{\sqrt{4+x}+1}=\frac{\sqrt{4+x}-1}{2}$$

Soluzione. La radice deve essere non negativa e il denominatore diverso da zero, per cui

$$\begin{cases} 4+x\geq 0 \\ \sqrt{4+x}\neq -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\geq -4 \\ \forall x \end{cases}$$

$$D: x\geq -4$$

moltiplichiamo per il mcm,

$$4\sqrt{4+x}-4=\left(\sqrt{4+x}-1\right)\left(\sqrt{4+x}+1\right)$$
$$4\sqrt{4+x}-4=4+x-1$$
$$4\sqrt{4+x}=x+7$$

anche il secondo membro deve essere non negativo, per cui

$$x\geq -7$$

e l'insieme delle soluzioni rimane invariato

eleviamo al quadrato

$$64+16x+=x^2+14x+49$$
$$x^2-2x-15=0$$
$$x=1\pm\sqrt{1+15}=\begin{array}{l}\nearrow \; -3 \\ \searrow \;\; 5\end{array}$$

Esercizio 220. Risolvere la seguente equazione dopo aver determinato il suo dominio

$$\frac{1}{x-\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}$$

Soluzione. La radice deve essere non negativa e il denominatore diverso da zero, per cui

$$\begin{cases} 1-x^2\geq 0 \\ x\pm\sqrt{1-x^2}\neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -1\leq x\leq 1 \\ x^2\neq 1-x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -1\leq x\leq 1 \\ x\neq\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$D:-1\leq x<-\frac{\sqrt{2}}{2}\ \vee\ \frac{\sqrt{2}}{2}<x\leq 1$$

moltiplichiamo per il mcm,

$$\cancel{x}+\sqrt{1-x^2}=\left(x^2-1+x^2\right)\cancel{+x}-\sqrt{1-x^2}$$

$$2\sqrt{1-x^2}=2x^2-1$$

anche il secondo membro deve essere non negativo, per cui

$$2x^2\geq 1 \quad x\leq\tfrac{\sqrt{2}}{2}\ \vee\ x\geq\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

e l'insieme delle soluzioni rimane invariato

$$4\cancel{-4x^2}=4x^4\cancel{-4x^2}+1$$

$$x^4=\frac{3}{4}$$

$$x^2=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\pm\frac{\sqrt[4]{12}}{2}$$

Esercizio 221. Risolvere la seguente equazione dopo aver determinato il suo dominio

$$2-\sqrt[3]{x-4}=0$$

Soluzione. Il radicando può essere positivo o negativo, essendo l'indice della radice dispari isoliamo la radice ed eleviamo al cubo

$$x-4=8$$

$$x=12$$

Esercizio 222. Risolvere la seguente equazione dopo aver determinato il suo dominio

$$\sqrt[3]{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^2+3x-1}=0$$

Soluzione. separiamo le due radici ed eleviamo al cubo

$$x^2+2x=x^2+3x-1$$

$$x=1$$